

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XIII.

**I. Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte;
von H. Helmholtz.**

(Aus den Berl. Monatsber. vom 17. Febr. 1881 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Weiches Eisen, in die Nähe eines Magnets gebracht, zeigt selbst Abstossungen und Anziehungen kleiner magnetischer oder magnetisirbarer Körper, die es vorher nicht zeigte. Um diese zu erklären, nimmt man eine gewisse Vertheilung des Magnetismus in den Molecülen des Eisens an. Faraday zeigte später, dass Wirkungen dieser Art nicht blos im Eisen, sondern in fast allen bekannten Körpern in sehr viel geringerer Stärke und zum Theil auch in entgegengesetztem Sinne nachzuweisen sind, und dass genau ähnliche Erscheinungen, die auf eine Vertheilung entgegengesetzter Electricitäten in den Molecülen electrischer Isolatoren hindeuten, durch electrische Anziehungskräfte hervorgerufen werden. Mathematisch wurden diese Erscheinungen von Poisson zuerst für das Gebiet des Magnetismus unter verhältnissmässig einfache Gesetze zusammengefasst, die wenigstens für mässige Stärken der Magnetisirung, und soweit sich nicht Wirkungen der reibungsähnlichen Coërcitivkraft einmischen, den Gang der Erscheinungen gut darstellen. Dieselben allgemeinen Gesetze lassen sich auch auf die schwächeren magnetischen Wirkungen in den paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen anwenden, und ebenso auf die electrische Polarisirung der Dielectrica, soweit in letzteren nicht Leitung und die der Leitung verwandt erscheinende Rückstandsbildung Zeit haben, sich zu entwickeln.

Die Erscheinungen, an denen Poisson seine Theorie ausbildete, waren Bewegungen starrer Magnete und magne-

tisirbaren Eisens im Luftraume. Später ist die Theorie von Sir W. Thomson auch auf die Bewegungen starrer Körper in magnetisirbaren Flüssigkeiten ausgedehnt worden mit Beziehung auf Faraday's diamagnetische Versuche. Sobald sich die Molecüle magnetisch oder electricisch polarisirter Medien gegeneinander verschieben können, wie in Flüssigkeiten oder in biegsamen elastischen Körpern, so kommen neben den ursprünglich angenommenen Fernkräften noch nothwendig moleculare Wirkungen in Betracht. Die in Richtung der Kraftlinien hintereinander liegenden Molecüle kehren einander befreundete Pole zu und müssen sich gegenseitig anziehen, die seitlich nebeneinander liegenden werden sich gegenseitig abstossen. Die bekannte Theorie der magnetischen Fernwirkung zeigt, dass parallel gerichtete kleine Magnete sich anziehen, wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen spitzen Winkel mit der magnetischen Axe beider macht, der kleiner ist als $54^{\circ}44'$ ($\arccos 1/\sqrt{3}$), sich abstossen, wenn der spitze Winkel grösser ist. Damit in Uebereinstimmung ist Faraday's Voraussetzung, dass in den magnetisch oder dielectricisch polarisirten Medien ein Zustand von Spannung bestehn in Richtung der Kraftlinien, in Folge dessen sich diese zu verkürzen streben, während quer gegen die genannten Linien ein Druck wirke, der die Substanz in dieser Richtung auseinander treibe. Sir W. Thomson¹⁾ hat schon 1843 den Beweis geführt, dass Kräfte dieser Art dieselben Wirkungen hervorbringen können, wie die directen Fernwirkungen nach der Theorie von Coulomb, und Cl. Maxwell hat diese Annahme von Faraday zur Grundlage seiner ganzen Theorie der Electricität und des Magnetismus gemacht. Die jüngst veröffentlichten Versuche von Hrn. Quincke zeigen in sehr auffallender Weise das Bestreben electricischer Isolatoren, sich quer gegen die Richtung der electricischen Kraftlinien zu dehnen, wenn auch diese Versuche über das Verhalten in Richtung der Kraftlinien noch Zweifel bestehen lassen.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, dass, wenn

1) Thomson, Cambridge Mathem. Journ. May 1843. — Reprint. Art. VII. § 147.

die Consequenzen von Poisson's Theorie auch nur in der angegebenen Ausdehnung, d. h. in ihrer Anwendung auf die Bewegungen starrer Körper im Luftraume als thatsächlich richtige Beschreibung der beobachtbaren Erscheinungen angesehen werden, und das Gesetz von der Constanz der Energie für dieses Gebiet von Erscheinungen als gültig betrachtet wird, dieses Gesetz allein ohne alle Zuziehung von Hypothesen über die innere Constitution der electricisch oder magnetisch polarisirten Körper es möglich macht auch die ponderomotorischen Kräfte zu finden, welche auf die inneren Theile solcher Körper einwirken und bei Formänderungen derselben sich geltend machen. Es ergibt sich dabei in der That, dass das von Faraday angenommene System von Spannungen längs der Kraftlinien und Drucken quer dagegen im Inneren solcher Körper wirksam sein muss. Die einzige Abweichung, welche meine Analyse gegen die von den Herren W. Thomson und Cl. Maxwell aufgestellten Formeln zeigt, ist, dass sie noch eine zweite Constante eintreten macht, durch welche das Verhältniss zwischen den Grössen jener Drucke und Spannungen von der Art der Substanz abhängig gemacht wird.¹⁾

§ 1. Die Arbeit bei Bewegungen starrer polarisirter Körper im Luftraum.

Da die hierher gehörigen Probleme bei ihrer Anwendung auf Electricität etwas andere Form erhalten als bei Poisson's ursprünglicher Anwendung derselben auf Magnetisirung, so will ich im Folgenden zunächst die Benennungen der Electricitätslehre anwenden. Die Uebertragung auf Magnete erfordert nachher nur unerhebliche Aenderungen. Es mögen λ , μ , ν die Componenten der dielectricischen Momente eines polarisirten Isolators sein, berechnet für die Volumeneinheit seiner Substanz, parallel den Axen der x , y , z genommen; ausserdem möge s die Raumdichtigkeit, e die Flächendichtigkeit von aussen zugeleiteter Elec-

1) Meine in Bd. 72 von Borchardt's Journ. für r. u. a. Mathematik gegebene Darstellung passt, dem dortigen Zwecke entsprechend, nur auf die innerhalb eines ponderablen Trägers fortgleitende Electricität.

tricität in seinem Inneren oder an seiner Oberfläche bedeuten, und φ die Potentialfunction aller freien, d. h. nicht durch die Polarisirung der Substanz neutralisirten Electricität sein, so wären die nach Poisson's Vorgang zu bildenden Gleichungen, welche die Abhängigkeit der genannten Grössen voneinander ausdrücken:

$$(1) \quad \lambda = -\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu = -\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \nu = -\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Die Raumdichtigkeit der freien Electricität wird sein:

$$(1^a) \quad \epsilon = -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi = \epsilon - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z},$$

und die Flächendichtigkeit, wenn N_1 und N_2 die auf der Fläche nach beiden Seiten hin errichteten Normalen sind, und N_1 mit den positiven Coordinatenaxen die Winkel a_1 , b_1 , c_1 macht:

$$(1^b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \right] \\ &= \epsilon - (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \cos a_1 - (\mu_1 - \mu_2) \cdot \cos b_1 - (\nu_1 - \nu_2) \cdot \cos c_1. \end{aligned} \right.$$

Die ponderomotorischen Kräfte, welche wirksam werden, wenn einer der electrisirten Körper, den wir mit A bezeichnen wollen, bewegt wird, sind nach Poisson's Annahme gleich den Fernkräften, welche die gesammte vorhandene freie Electricität der übrigen Körper auf die jedes einzelnen ausübt. Das virtuelle Moment dieser Kräfte bei wirklich eintretenden Verschiebungen oder die Arbeit, welche die genannten Kräfte bei solcher Verschiebung verrichten, wird infolge dessen gegeben durch die Aenderung, die durch die Verschiebung im Werthe des Potentials P aller freier Electricität gegeneinander eintritt, während diese selbst in jedem Punkte des bewegten Körpers als unverändert betrachtet wird. Dieses Potential ist:

$$(1^c) \quad P = \frac{1}{2} \iiint \epsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \int \varphi \cdot \mathfrak{E} \cdot d\omega,$$

und seine Aenderung bei eintretender Bewegung wird sein:

$$(1^d) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta P &= \frac{1}{2} \iiint \epsilon \cdot \delta \varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \int \mathfrak{E} \cdot \delta \varphi \cdot d\omega, \\ &= -\frac{1}{8\pi} \iiint \Delta \varphi \cdot \delta \varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} \right) \delta \varphi \cdot d\omega. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet $\delta \varphi$ die Aenderung, welche in dem betreffenden Punkte des bewegten Körpers sowohl durch seine eigene

Bewegung wie durch die aller anderen Punkte eintritt, in deren jedem die freie Electricität als unveränderlich betrachtet wird. Würde unter $\delta\varphi$ nur die durch die eigene Bewegung des betreffenden Punktes erzeugte Aenderung verstanden, so wäre der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen.

Poisson's Theorie hat, wie schon bemerkt, als Grundlage nur die Erfahrungen, welche bei der Bewegung starrer magnetisirter Körper im Luftraume gemacht waren. Um nun auch in allgemeineren Fällen die Grösse der bei der Bewegung electrisirter Körper aufzuwendenden Arbeit berechnen zu können, habe ich den Integralen, welche den Werth der Energie ausdrücken, eine besondere Form gegeben. Im allgemeinen kommt darin eine ganze Reihe verschiedener Grössen vor, Potentialfunctionen, Momente, Dichtigkeiten, die durch die Gleichgewichtsbedingungen voneinander abhängig sind, und man kann mittels der letzteren Bedingungen bald die eine, bald die andere der genannten Grössen aus dem Werthe der Energie eliminiren oder auch in ihn einführen. Unter allen diesen Formen gibt es nun eine, welche ich die Normalform nennen möchte, bei der die Variation ersten Grades des betreffenden Integrals, welche einer willkürlichen Variation der abhängigen und bei Herstellung des Gleichgewichts sich verändernden Grössen entspricht, gleich Null wird. Bei der Anwendung einer solchen Form hat man den Vortheil, dass bei Berechnung der Aenderung des Arbeitswerthes infolge irgend einer anderen Einwirkung die dabei eintretenden Aenderungen jener erstgenannten Grössen ausser Betracht gelassen werden können, eben weil die durch ihre Aenderung bewirkte Arbeit gleich Null ist.

In unserem Falle bilden wir das über den unendlichen Raum zu erstreckende Integral:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} = & \iiint \left\{ \varphi \cdot \varepsilon + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2\vartheta} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy \cdot dz + \int \varphi \cdot e \cdot d\omega, \end{aligned} \right.$$

mit den Bedingungen, dass $\delta\mathfrak{B} = 0$, im Falle λ , μ , ν oder φ variirt werden. Ich will das hier und in der Folge so schreiben:

$$(2^a) \quad \delta_\lambda \mathfrak{B} = \delta_\mu \mathfrak{B} = \delta_\nu \mathfrak{B} = \delta_\varphi \mathfrak{B} = 0.$$

Führen wir diese Variationen aus, so erhalten wir in der That die oben unter (1), (1^a) und (1^b) aufgeführten Bedingungengleichungen.

Um zu berechnen, welche Aenderung im Werthe von \mathfrak{B} bei Lagenänderungen eines oder mehrerer der electrisirten starren Körper eintritt, wollen wir zunächst annehmen, dass dabei nicht bloß die Grössen ε und e , sondern auch λ , μ , ν in jedem materiellen Punkte und Volumenelement der betreffenden Körper ihre Werthe unverändert behalten, dann würde auch überall der Werth der durch die Gleichungen (1^a) und (1^b) bestimmten freien Electricität, beziehlich der Grössen $\Delta\varphi$ und $(\partial\varphi/\partial N_1 + \partial\varphi/\partial N_2)$ in jedem materiellen Punkte unverändert bleiben, φ aber sich ändern wegen der geänderten räumlichen Verhältnisse. Um die entsprechende Variation von \mathfrak{B} zu finden, würden wir den Betrag der zu integrierenden Grössen für jedes Volumenelement der betreffenden Körper vor und nach der Verschiebung zu vergleichen haben, nachdem wir den Theil:

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz \\ &= - \int \frac{1}{8\pi} \varphi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N} d\omega - \int \frac{1}{8\pi} \varphi \cdot \Delta\varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

aus der ersten in die zweite Form umgeschrieben haben. Dann sind die Integrale nur über das Innere der electrisirten Körper zu erstrecken, da λ , μ , ν , $\Delta\varphi$ in dem zwischen diesen liegenden Raum in Poisson's Theorie gleich Null gesetzt werden, und es wird:

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{B} &= \iiint \delta\varphi \cdot \left\{ \varepsilon - \frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \Delta\varphi \right\} dx \cdot dy \cdot dz \\ &+ \int \delta\varphi \cdot \left\{ e - \lambda \cdot \cos a - \mu \cdot \cos b - \nu \cdot \cos c + \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N} \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Gleichungen (1^a) und (1^b) führt dies auf die in (1^a) gefundene Form:

$$\delta\mathfrak{B} = - \iiint \frac{1}{8\pi} \cdot \delta\varphi \cdot \Delta\varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \int \frac{\delta\varphi}{8\pi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N} \cdot d\omega = \delta P.$$

Das heisst die Zunahme des \mathfrak{B} bei der vorausgesetzten Aenderung ist gleich der Zunahme, welche das Potential sämt-

licher vorhandenen freien Electricität durch dieselbe Lagenänderung erfahren würde, wenn diese an den ponderablen Theilen festhaftete. Wegen der besonderen Eigenschaften der Function \mathfrak{B} ändert sich dieser Werth nicht mehr, wenn man nachträglich in der zweiten Lage die dem neuen Gleichgewichte entsprechende Grösse der Momente λ, μ, ν eintreten lässt. Also auch, wenn man für \mathfrak{B} die den Gleichgewichtsbedingungen (2^a) entsprechenden Werthe der abhängenden Veränderlichen $\lambda, \mu, \nu, \varphi$ als fortdauernd gültig voraussetzt, wird bei Lagenänderungen der einzelnen starren Körper sein:

$$\mathfrak{B} - P = \text{Const.},$$

wobei P die Arbeit bedeutet, welche zur Ueberwindung der ponderomotorischen Kräfte der Electricität bei Lagenänderungen der betreffenden starren Körper aufzuwenden ist. Es geht hieraus also auch hervor, dass diese Arbeit trotz der Veränderlichkeit der electricischen Vertheilung nur abhängt von der Anfangs- und Endlage der betreffenden Körper, nicht von dem Wege, auf dem man sie aus der einen in die andere Lage geführt hat.

Uebrigens ist noch zu beachten, dass auch für Aenderungen in der Vertheilung der eingeleiteten Electricität ε und e die Aenderung von \mathfrak{B} :

$$\delta \mathfrak{B} = \iiint \varphi \cdot \delta \varepsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int \varphi \cdot \delta e \cdot d\omega$$

wiederum gleich ist der Arbeit, welche man hätte aufwenden müssen, um in leitenden Drähten durch passend angebrachte electromotorische Kräfte die bewegten Quanta $\delta \varepsilon$ und δe zwischen Orten von verschiedenen Potentialwerthen φ fortzuleiten.

Setzen wir die aus den Gleichungen (1), (1^a) und (1^b) sich ergebenden Werthe von $\lambda, \mu, \nu, e, \varepsilon$ in die Gleichung (2), so erhalten wir die für den Fall des hergestellten Gleichgewichts geltenden Formen des Werthes von \mathfrak{B} :

$$(2^b) \quad \mathfrak{B}_b = \frac{1}{2} \iiint \varphi \cdot \varepsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \int \varphi \cdot e \cdot d\omega.$$

$$(2^c) \quad \mathfrak{B}_c = \iiint \frac{1 + 4\pi \vartheta}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz$$

Die Combination:

$$(2^d) \quad \mathfrak{B} = 2\mathfrak{B}_b - \mathfrak{B}_c \quad \text{mit der Bedingung:} \quad \delta_\varphi \mathfrak{B} = 0$$

ist wieder eine Normalform, aus der λ , μ , ν ausgeschieden sind.

Aus der Form (2^b) folgt, dass $\mathfrak{B} = 0$ wird, wenn die Körperelemente, welche angesammelte Electricität enthalten, voneinander und von den übrigen in unendliche Entfernung gebracht sind.

Die Grösse \mathfrak{B} ist also das Maass der Arbeit, welche verwendet werden muss, um die entsprechende Anordnung der electrisirten Körper herzustellen, wenn die Quanta freier Electricität sich zuerst unter dem Potentialwerthe Null befunden haben. Dies ist anwendbar auf jede Art von Electricisirung, welche durch beliebige Vertheilung zugeleiteter electrischer Quanta im Inneren oder an der Oberfläche der betreffenden Körper entstehen kann.

Im Falle unter den electrisirten Körpern' auch Leiter sind, wird innerhalb jedes Leiters auch ϵ , beziehlich e variabel, aber so, dass die in der ganzen Ausdehnung des Leiters enthaltene gesammte Quantität der Electricität unverändert bleibt, d. h. es ist innerhalb des Leiters zu setzen:

$$\delta_\epsilon \mathfrak{B} + C \iiint \delta \epsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz + C \int \delta e \cdot d\omega = 0.$$

Die aus der Variation hierbei folgenden Bedingungen sind:

$$0 = \delta \epsilon \{ \varphi + C \}, \quad 0 = \delta e \{ \bar{\varphi} + C \},$$

die für die Ausdehnung jedes zusammenhängenden Leiters gelten. Für getrennte Leiter sind verschiedene voneinander unabhängige Constanten C anzuwenden.

Uebrigens kommt man genau zu demselben Resultate, wenn man die Quantität von Electricität, die der Leiter enthalten soll, in ihm als festliegende Masse ϵ annimmt und dann $\vartheta = \infty$ setzt. Um den Werth von \mathfrak{B} in (2_c) zum Minimum zu machen, wird unter diesen Umständen, so weit $\vartheta = \infty$ ist, sein müssen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varphi = C,$$

und das Quantum der im Leiter enthaltenen Electricität wird durch die eintretende dielectriche Polarisirung desselben nicht geändert. Wenn wir diese Form der Behandlung des Problems wählen, wird also der Fall der Leiter als Grenzfall in die bisherigen Rechnungsformen mit eingeschlossen.

Bei der Anwendung auf magnetische Vertheilung kann im ganzen genau ebenso verfahren werden, nur würden die Quanta ϵ und e als festliegend in den Gegenden der Pole unveränderlicher Magnete angesehen werden müssen, und das Gesamtquantum derselben in jedem Magnet gleich Null zu setzen sein. Die aufgestellten Gleichungen würden den Fall mit umfassen; dass neben dem unveränderlichen Magnetismus, der den Quantis ϵ und e entspricht, in der Masse des Magneten sich durch Induction temporärer Magnetismus entwickelt.

Die Function \mathfrak{B} , berechnet für Gleichgewichtszustand in den polarisirten Körpern, kann auch auf die Form gebracht werden:

$$(2^e) \quad \mathfrak{B} = \iiint \frac{1 + 4\pi \vartheta}{8\pi \vartheta^2} \cdot [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad \text{oder:}$$

$$(2^f) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \iiint \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz + \\ &+ \iiint \frac{1}{2\vartheta} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned} \right.$$

In der letzteren Form ist das erste Integral die Arbeit der freien Electricität, nach ihrer Wirkung im Luftraume berechnet, das zweite der Betrag, den die Polarisirung der dielectriche Substanzen hinzufügt. Die Form (2^e) entspricht der Theorie von Faraday, wonach auch im Luftraume Polarisirung stattfindet. Soll sie auf den Luftraum mit der Annahme $\vartheta = \lambda = \mu = \nu = 0$ angewendet werden, so ist hier für λ/ϑ u. s. w. die electriche Kraft ($-\partial q/\partial x$) zu setzen, um der Form (8) zu entgehen, wie dies in (2^f) geschehen ist.

Wenn wir annehmen, die durch die Gleichungen (1), (1^a) und (1^b) bestimmte Polarisirung könnte unveränderlich gemacht werden, wie dies bei magnetischen Substanzen durch die Coërcitivkraft wirklich in ge-

wissem Grade geschieht, und es würden dann noch neue electrische Quanta von der Dichtigkeit ϵ_1 und e_1 hinzugebracht, die, für sich genommen, die Potentialfunction ψ hervorbrächten, so würde deren Ansammlung zunächst gegen ihre eigenen Kräfte die Arbeit:

$$\frac{1}{8\pi} \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz$$

erfordern. Weiter wäre die Abstossung der früher vorhandenen electrischen Quanta und Momente zu überwinden, deren Potentialfunction φ ist. Dies gibt:

$$\begin{aligned} & \iiint \varphi \cdot \epsilon_1 \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int \varphi \cdot e_1 \cdot d\omega \\ &= \iiint \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Arbeitsbeträge unter der Bezeichnung \mathfrak{B} zusammenfassen, so ergibt sich die Gesamtarbeit mit Hinzufügung des Werthes von \mathfrak{B} aus (2^f):

$$(2^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} &= \frac{1}{8\pi} \cdot \iiint \left\{ \left(\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \cdot dy \cdot dz \\ &+ \iiint \frac{1}{2\vartheta} \{ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \} dx \cdot dy \cdot dz, \end{aligned} \right.$$

eine der Form (2^f) vollkommen analoge Form. Daraus geht hervor, dass diese ihre Bedeutung auch dann behält, wenn die Momente λ , μ , ν zwar eine solche Anordnung haben, als wären sie durch die vertheilende Wirkung von eingeleiteter Electricität hervorgebracht, aber nicht der zur Zeit bestehenden electrischen Vertheilung entsprechen.

Man findet diese Form z. B. in der Gleichung für die Constanz der Energie (20^k) meiner ersten Abhandlung über Theorie der Electrodynamik¹⁾ für die electrostatische Arbeit wieder, obgleich dort noch inducirte electromotorische Kräfte mitwirken. Für die magnetischen Kräfte findet sich ebenda die einer Gleichgewichtslage entsprechende Form (2^g). Diese Gleichgewichtslage ist aber dort unter dem Einflusse electrischer Ströme zu Stande gekommen. Letztere wirken nach Ampère's Darstellung festen Magneten analog, aber sie machen die Potentialfunction φ mehrdeutig. Eindeutig wird

1) Helmholtz, Borchardt's Journ. für r. u. a. Math. 72. p. 125. 1870.

diese nur, wenn wir den Raum, der um die Stromleiter herum mehrfach zusammenhängend ist, durch passend gelegte Schnittflächen einfach zusammenhängend machen. An jeder solchen Schnittfläche muss die Potentialfunction φ einen Sprung machen, sodass:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -4\pi J,$$

wo J die Stromintensität bedeutet. Die Schnittflächen dürfen nicht die unveränderlichen Magnete schneiden, die in den bisher angewendeten Gleichungen nur durch die magnetischen Quanta ihrer Pole ϵ und ε repräsentirt sind, da es nicht gleichgültig ist, ob der die Pole verbindende Magnetstab auf der einen oder anderen Seite des Stromleiters vorbeigeht. Es dürfen also auch bei Verschiebungen der verschiedenen Körper die Quanta ε und ϵ nie durch die genannten Schnittflächen hindurchgehen.

Wenn dies festgehalten wird, so ist zunächst ersichtlich, dass der Werth von \mathfrak{B} , wie er in Gleichung (2) gegeben ist, nicht von der Lage der genannten Schnittflächen abhängig ist. Denn wenn wir sie verschieben, ändert sich nur der Werth von φ , nicht aber der seiner Differentialquotienten, in denjenigen Stellen des Raumes, durch welche die Fläche passirt ist. Da nun φ nur mit ε oder ϵ multiplicirt in Gleichung (2) vorkommt, und die Pole der Magnete nicht durch die Fläche gehen sollen, so ändert sich nichts im Werthe von \mathfrak{B} durch eine Verschiebung der Schnittfläche innerhalb des Bereiches der nur temporär magnetisirten Körper, und die Function \mathfrak{B} wird also auch in diesem Falle die ponderomotorische Arbeit auszudrücken geeignet sein, welche bei constant erhaltener Stromintensität aufgewendet werden muss, um die verschiedenen magnetisirten oder magnetisirbaren Körper in der Nähe des Stromleiters zu bewegen. Nur ist dabei die in den obigen Ausdruck von \mathfrak{B} nicht mit aufgenommene Bedingung festzuhalten, dass φ beim Umlauf um den Stromleiter, wenn dessen Stromintensität J ist, um die Grösse $4\pi J$ zunehme.

Zu bemerken ist, dass der Werth von \mathfrak{B} in (2°), der hier nur durch Betrachtung der zur Herstellung der Magnetisirung aufgewendeten Arbeit gewonnen ist, sich

in meiner ersten Abhandlung über Electrodynamik in der schon citirten Gleichung (20^k) als vollständiger Werth der electrokinetischen Energie galvanischer Ströme gefunden hat. Die dortigen Werthe von λ , μ , ν beziehen sich aber nur auf die durch die Ströme selbst hervorgerufene Magnetisirung, da sie nur den mit den Strömen verschwindenden Theil derselben berücksichtigen. Die Herleitung des Werthes beruht dort auf ganz anderen Principien, nämlich auf Berechnung der Wärmeentwicklung durch die Inductionsströme; sie kann für ungeschlossene Ströme problematisch erscheinen, für geschlossene aber hat sie sichere Grundlagen. Wenn im Luftraum $\vartheta = 0$ genommen wird, muss ebenda λ/ϑ durch den Werth der magnetischen Kraft ersetzt werden.

§ 2. Die auf das Innere dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte.

Um eine Anzahl electrisirter und entweder leitender oder dielectrisch polarisirbarer Körper aus unendlicher Ferne in eine durch den Index 0 zu bezeichnende Lage zu bringen, brauchen wir die vom Wege unabhängige Arbeit \mathfrak{B}_0 ; um sie in irgend eine andere, durch den Index 1 bezeichnete Lage zu bringen, dagegen die Arbeit \mathfrak{B}_1 ; folglich, um sie aus der Lage 0 im electrisirten Zustande in die Lage 1 zu bringen, die Arbeit $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_0$. Diese Verschiedenheit beider Lagen kann auch verschiedene Formen der dielectrischen Körper umfassen, da diese fern von den electrisirten Körpern, ehe man sie in die Lage 1 überführt, beliebige Formänderungen erleiden können, ohne dass Arbeit gegen electrische Kräfte zu leisten wäre. Electrisirte Körper müsste man vorher in kleine Theile zerlegt denken, oder durch Leitung geladen. Beides gibt schliesslich, wie oben gezeigt wurde, denselben Betrag an Arbeit.

Als die zu variirende Normalform von \mathfrak{B} können wir hier die einfachere in (2^d) gegebene benutzen, welche nur die Grössen ε , e und φ enthält, nämlich:

$$(2^d) \quad \mathfrak{B} = \iiint \left\{ \varphi \cdot \varepsilon - \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Wenn sich die dielectricischen Massen bewegen, so ändert sich an den einzelnen Stellen des Raumes durch die Bewegung zunächst der Werth von ϑ . Bezeichnen wir beziehlich mit ξ, η, ζ die Verschiebungen, welche der Punkt x, y, z in Richtung dieser Coordinaten erleidet, und betrachten wir vorläufig ξ, η, ζ und ϑ als continuirliche Functionen der Coordinaten mit dem Vorbehalt, Fälle von sprungweiser Aenderung dieser Grössen an einzelnen Flächen nach gefundener Lösung als Grenzen einer immer jächer werdenden continuirlichen Aenderung zu betrachten: so würde nach der Verschiebung die durch dieselbe eingetretene Aenderung des Werthes von ϑ im Raumpunkte x, y, z , wenn wir mit σ die Dichtigkeit der Substanz bezeichnen, sein:

$$\delta \vartheta = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \xi - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \zeta + \frac{\partial \vartheta}{\partial \log \sigma} d \log \sigma.$$

Es ist aber nach bekannten Sätzen:

$$d \log \sigma = -\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Bezeichnen wir die von der Art der Substanz abhängige Constante:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \log \sigma} = \theta,$$

so wird also:

$$(3) \quad \delta \vartheta = -\xi \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \eta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \zeta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \theta \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right].$$

Ebenso wird sein, wenn sich ε mit den Körpern bewegt:

$$(3^a) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \varepsilon &= -\xi \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \eta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \zeta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right], \text{ oder:} \\ -\delta \varepsilon &= \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon \xi) + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon \eta) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon \zeta). \end{aligned} \right.$$

Wenn wir nun die Variation von \mathfrak{B} zunächst so vollziehen, dass an jeder Stelle des Raumes die Werthe von φ ungeändert bleiben, so sind im Werthe von \mathfrak{B} nur ϑ und ε in dem angegebenen Betrage zu variiren. Variiren wir nachher die Werthe von φ so, dass diese in die von dem neuen Gleichgewichtszustande verlangten Werthe übergehen, so ändert dies unter den gemachten Voraussetzungen nicht mehr den Betrag der gesammten Variation, da:

$$\delta_{\varphi} \mathfrak{B} = 0.$$

Der Energievorrath also wächst auch bei erhaltenem Gleichgewichtszustande um den durch Variirung von ϑ und ϵ erhaltenen Betrag von $\delta \mathfrak{B}$, während gleichzeitig die durch die Magnetisirung hervorgebrachten ponderomotorischen Kräfte X , Y , Z ihre Arbeit leisten. Das Princip von der Constanz der Energie verlangt:

$$(3^b) \quad \delta \mathfrak{B} + \iiint [X \cdot \xi + Y \cdot \eta + Z \cdot \zeta] dx \cdot dy \cdot dz = 0.$$

Berechnen wir $\delta \mathfrak{B}$ aus (2^d), so kann die Gleichung (3^b) nicht erfüllt sein, wenn nicht zusammengefasst unter ein Integralzeichen die mit ξ , η , ζ multiplicirten Factoren einzeln gleich Null sind. Also die erste dieser Gleichungen ist:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = X + \epsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \vartheta \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Die analogen Ausdrücke für Y und Z sind leicht zu bilden. Der hier gefundene Werth dieser Componenten umfasst nun alle die electricischen Einflüsse zusammengekommen, welche auf die Volumeneinheit der Substanz am Orte x, y, z einwirken. Diese können zum Theil directe Wirkungen entfernter Theile, zum Theil Wirkungen aus nächster Nähe sein. Wie man die Theilung zwischen beiden ausführt, ist einigermassen willkürlich. Die Molecularkräfte müssen den Bedingungen unterworfen sein, welche das Princip von der Gleichheit der Action und Reaction stellt, und die aus der Theorie der elastischen Körper bekannt sind. Bezeichnen wir nämlich mit A Kräfte, die in Richtung der x , mit B solche die in Richtung der y , mit C solche die in Richtung der z fallen; mit dem Index x solche die auf die Einheit einer der yz Ebene parallelen Fläche von Seite der positiven x wirken u. s. w., so muss sein:

$$(4^a) \quad A_y = B_x, \quad B_z = C_y, \quad C_x = A_z.$$

Die auf die Flächeneinheit einer Ebene, deren Normale die Winkel a, b, c mit den positiven Coordinatenaxen macht, auf Seite dieser Normale wirkenden Kräfte, müssen eben deshalb sein:

$$A_n = A_x \cdot \cos a + A_y \cdot \cos b + A_z \cdot \cos c,$$

$$B_n = B_x \cdot \cos a + B_y \cdot \cos b + B_z \cdot \cos c,$$

$$C_n = C_x \cdot \cos a + C_y \cdot \cos b + C_z \cdot \cos c.$$

Die auf die Volumeneinheit des inneren Raumes wirkenden Kräfte ergeben sich dann in der Form:

$$(4^b) \quad \begin{cases} X = \frac{\partial}{\partial x} \cdot A_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot A_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot A_z \\ Y = \frac{\partial}{\partial x} \cdot B_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot B_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot B_z \\ Z = \frac{\partial}{\partial x} \cdot C_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot C_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot C_z \end{cases}$$

Die Frage der Rückführung der Molecularkräfte gestaltet sich also dahin, ob es möglich ist, die gefundenen Werthe von X, Y, Z in die Form (4^b) mit Einhaltung der Bedingungen (4^a) zu bringen, wobei die Grössen A, B, C nur von dem örtlichen Zustande der dielectrischen Polarisation abhängen dürfen.

Nun kann man in der That die in (4) gegebenen Kräfte gänzlich auflösen in Molecularkräfte von der Form (4^b).

Um diese Reduction auszuführen, dient folgende Umformung:

Gleichungen (1) und (1^a) ergeben:

$$(4^c) \quad \begin{cases} -4\pi\epsilon = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right], \end{cases}$$

daraus folgt, dass:

$$(4^d) \quad \begin{cases} 4\pi\epsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + 4\pi\vartheta) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + 4\pi\vartheta) \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \\ - 2\pi \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Drückt man die Differentialquotienten von φ mittels der Gleichungen (1) durch λ, μ, ν aus, so lassen sich die

Kräfte X , Y , Z in die Form (4^b) bringen, wenn man setzt:

$$(4^c) \left\{ \begin{aligned} A_x &= \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^3} [\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^3} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \\ B_y &= \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^3} [-\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^3} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \\ C_z &= \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^3} [-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^3} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \\ A_y &= B_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^3} \cdot \lambda\mu \quad B_z = C_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^3} \cdot \mu\nu \\ C_y &= A_z = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^3} \cdot \nu\lambda, \end{aligned} \right.$$

oder auch:

$$A_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] \text{ etc.}$$

$$A_y = B_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} \text{ etc.}$$

Man kann diese Kräfte auch zusammengefasst denken in

1) einen Druck, der überall in Richtung der nach aussen gewendeten Normale jeder Grenzfläche wirkt im Betrage von:

$$\frac{1+4\pi(\vartheta-\theta)}{8\pi\vartheta^3} [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2],$$

2) einer in Richtung der Kraftlinien wirkenden Spannung im Betrage von:

$$\frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^3} \cdot [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \cdot \cos \eta,$$

wobei mit η der spitze Winkel bezeichnet ist, den die Richtung der electricischen Kraft mit der Normale der Oberfläche macht.

Bezeichnen wir die Resultante der electricischen Kraft mit R :

$$R^2 = \frac{1}{\vartheta^3} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

so ist die hier erwähnte Spannung auch zu setzen gleich:

$$\frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi} \cdot R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N}$$

und fällt in die Richtung der in das Innere eintretenden Kraftlinie.

In der Form, wie die Werthe der Kräfte hier gefunden

sind, passen sie auch ohne Schwierigkeit für den Fall, dass an Grenzflächen der Körper der Uebergang in den Werthen der φ discontinuirlich wird, oder daselbst zusammengedrückte Flächenschichten von Electricität liegen, da in den Werthen der A, B, C weder die Grösse ϵ , noch Differentialquotienten von φ nach den Coordinaten vorkommen. Will man jedoch zur Controle der Richtigkeit des Verfahrens die an der Grenze verschiedener Substanzen eintretenden Discontinuitäten im Werthe von φ gleich von vorn herein als solche berücksichtigen, so ist bei der Ausführung der Rechnung zu beachten, dass die oben gebildete Gleichung:

$$\delta_{\varphi} \mathfrak{B} = 0$$

sich nur auf die Variation ersten Grades bezieht. Dem gesammten Betrage der Veränderung von W entspricht dieser Werth von δW aber nur, wenn die Quadrate und Producte der variirten Grössen gegen die Glieder ersten Grades vernachlässigt werden dürfen. Wenn nun eine Körpergrenze, wo zwei Medien zusammenstossen, deren dielectriche Constanten ϑ_1 und ϑ_0 sind, und die mit der Flächendichtigkeit ϵ belegt ist, in Richtung der Normale N_0 so weit vorrückt, dass eine Schicht von der Dicke dN , welche bisher die Constante ϑ_0 hatte, den Werth ϑ_1 bekommt, so entsteht zunächst bei unveränderten Werthen von φ dadurch eine Aenderung von \mathfrak{B} , welche beträgt:

$$-fd\omega \cdot dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \epsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Bezeichnen wir den grössten Differentialquotienten, den φ in Richtung der Fläche hat, mit $\partial \varphi / \partial s$, so lässt sich dies auch schreiben:

$$-fd\omega \cdot dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right)^2 \right] - \epsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Denn zunächst, ehe die Werthe von φ auf den neuen Gleichgewichtszustand zurückgeführt sind, herrscht in der betreffenden Schicht noch der alte Werth des dortigen $\partial \varphi / \partial N_0$. Wenn nun dieser Uebergang in den Gleichgewichtszustand vor sich geht, tritt in dieser Schicht der Werth des Differentialquotienten $\partial \varphi / \partial N_1$ ein, der der anderen Seite der Fläche entspricht und von jenem wegen der Gleichung:

$$(4^f) \quad -4\pi e = (1 + 4\pi\vartheta_0) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N_0} + (1 + \pi\vartheta_1) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N_1}$$

endlich unterschieden ist. Setzen wir nun:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\right)^2 - 2 \frac{\partial\varphi}{\partial N_1} \cdot \frac{\delta\partial\varphi}{\delta N} + \left(\frac{\delta\partial\varphi}{\delta N}\right)^2,$$

wo annähernd:
$$\frac{\delta\partial\varphi}{\delta N} = \frac{\partial\varphi}{\partial N_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial N_1},$$

so ist diese Variation des Differentialquotienten in der Schicht von Dicke dN endlich, und also ihr Quadrat nicht zu vernachlässigen. Die Glieder ersten Grades werden, wenn man von einer Gleichgewichtslage ausgeht, natürlich auch in diesem Falle gleich Null, ob die $\delta\varphi$ verschwindend klein oder endlich sind. Wenn wir aber das quadratische Glied der Variation fortnehmen, wird der Werth der Variation von \mathfrak{B} , der von dieser Lagenänderung der Fläche herrührt, nunmehr verändert in:

$$-fd\omega \cdot dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \right] - \frac{1 + 4\pi\vartheta_1}{8\pi} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial N_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial N_1} \right]^2 - e \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Mit Benutzung der Gleichung (4^f) für den Werth von e reducirt sich dies auf:

$$fd\omega \cdot dN \left\{ \frac{1 + 4\pi\vartheta_1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \right] - \frac{1 + 4\pi\vartheta_0}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \right] \right\}.$$

Der von θ unabhängige Theil der nach dem Inneren hin normal zur Grenzfläche wirkenden Kraft ergibt sich hieraus gleich:

$$\frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \right\}$$

übereinstimmend mit den in (4^e) für die Coordinatenebenen gegebenen Werthen. Tangentiale Kräfte ergeben sich ebenfalls, wenn man nachträglich auch noch Verschiebungen der Schicht e in Richtung der Fläche voraussetzt.

In der von Cl. Maxwell gegebenen Darstellung¹⁾ dieses Kraftsystems fehlt das mit θ multiplicirte Glied. Es ist in unsere von Poisson's Voraussetzungen ausgehende Analyse eingetreten, da wir die Möglichkeit der Dehnung ponderabler

1) Cl. Maxwell, *Electricity and Magnetism*. 1. §§ 104–107. Oxford 1873.

Dielectrica mit in Betracht zogen. Für das zwischen den bewegten Körpern liegende Vacuum aber, beziehlich den Luftraum, ist ϑ nach Poisson's Voraussetzungen, denen wir hier gefolgt sind, überhaupt gleich Null und bleibt gleich Null, wie auch die Form und das Volumen des Vacuums sich verändern möge. Diese Voraussetzungen impliciren also für das Vacuum auch den Werth $\theta = 0$. In der That ergibt sich bei Untersuchung dieses Punktes, dass nur in Medien, in denen entweder $\theta = 0$, oder die incompressibel sind, die ponderomotorischen Kräfte genau dieselbe Vertheilung zeigen, wie sie es im Vacuum nach Coulomb's Hypothese thun würden.

Wenn wir nämlich das Medium als eine homogene Flüssigkeit betrachten, die kein eingeleitetes ε enthält, deren Druck p , deren Dichtigkeit σ sei, während P das Potential der äusseren auf die Masseneinheit der Flüssigkeit wirkenden ponderomotorischen Kräfte (z. B. Schwere) darstellt, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$X = \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial z}.$$

In einer homogenen Flüssigkeit werden ϑ und σ nur vom Drucke p abhängen, und da:

$$\theta = \frac{\partial \vartheta}{\partial \cdot \log \sigma},$$

so können wir die erste jener Gleichungen mit Berücksichtigung von (4) schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\theta}{2\vartheta^2}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\theta}{\vartheta^2}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \right\},$$

oder wenn wir statt des Druckes p die Function ψ von σ einführen, für welche:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma},$$

so erhalten wir aus den drei obigen Gleichungen des Gleichgewichts die eine Integralgleichung:

$$(4^f) \quad \psi + P + C = \frac{\theta}{2\sigma} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

welche anzeigt, dass unter Einwirkung der gefundenen Kräfte auch flüssige Medien im Gleichgewicht sein können; ferner,

dass wenn $\theta = 0$, Druckunterschiede innerhalb der Flüssigkeit durch die electricischen Kräfte überhaupt nicht hervorgerufen werden.

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so ist:

$$\psi = \frac{p}{\sigma},$$

und die electricische Polarisirung bringt dann also neben den sonst schon bestehenden Druckunterschieden den Druck:

$$p_1 = \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

hervor. An der Grenze des Mediums tritt diesem aber der ebenso grosse, von θ abhängige Theil der Oberflächenkraft entgegen, den die Gleichungen (4^e) anzeigen. Auf die jenseits der Grenze gelegenen Körper hat der von θ abhängende Druck also unter diesen Bedingungen gar keinen Einfluss. Es ist dies das folgerichtige Ergebniss der Betrachtung, durch welche θ eingeführt wurde. Dies geschah in der Voraussetzung, dass die Substanz durch Dichtigkeitsänderungen Aenderungen ihrer dielectricischen Constante erleiden könnte. Ist sie incompressibel, so ist diese Möglichkeit wirkungslos.

Nur in einem Medium, in welchem ϑ constant, in welchem also entweder $\theta = 0$ oder σ constant ist, ergibt die Gleichung (4^e) für $\varepsilon = 0$ auch:

$$\Delta \varphi = 0,$$

wie es nach Coulomb's Theorie im leeren Raume stattfinden muss. In einem anders beschaffenen Medium, für welches beide genannte Annahmen nicht zuträfen, würde auch die Differentialgleichung für φ sich ändern.

Auf temporär magnetisirte Substanzen sind die hier vorgetragenen Sätze ebenfalls zu übertragen, aber mit Ausschluss der Formänderungen permanenter Magnete, da wir nicht wissen, ob die Gleichung (3^a) auf das Verhalten von solchen anwendbar ist.

In der Form (4^e) sind die Fernkräfte ganz verschwunden und ersetzt durch die Reactionen des polarisirten Mediums. Es ist dies die Anschauungsweise von Faraday und Cl. Maxwell, die auch in dem von ponderabler Substanz

leeren Raume den Aether als Träger dieser Spannungen betrachten.

Man kann aber auch die zweierlei Ursachen nebeneinander bestehen lassen, wenn man die directen Fernwirkungen nicht aufgeben will. Da nämlich die Dichtigkeit der freien Electricität im Raume dargestellt werden kann durch:

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi,$$

und wir die identische Gleichung bilden können:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\},$$

so können wir diesen Ausdruck mit 4π dividirt zum Werthe von X addiren, ohne diesen zu verändern. Dann ist:

$$(5) \quad X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\Delta \varphi}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{A}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{A}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{A}_z).$$

$$(5^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_x = \frac{1}{2\vartheta} (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) + \frac{\nu}{2\vartheta^2} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \text{ etc.} \\ \mathfrak{A}_y = \mathfrak{B}_x = \frac{1}{\vartheta} \lambda \mu \text{ etc.} \end{array} \right.$$

und da $\lambda^2/\vartheta = \vartheta \cdot (\partial \varphi / \partial x)^2$ etc., so fallen im Raume, wo $\vartheta = 0$, die molecularen Spannungen fort. Diese wirken nur in den ponderablen Dielectricis, und neben ihnen die Fernwirkungen der freien Electricität, welche in dem ersten Gliede des Werthes von X angezeigt werden. Dass die von der Theorie angezeigten dehnenden Kräfte quer gegen die Kraftlinien bestehen, ist durch die von Hrn. G. Quincke kürzlich veröffentlichten Versuche für eine Reihe von Substanzen erwiesen worden.¹⁾

Eine Prüfung des Gesetzes der Anziehungen im Inneren einer dielectricischen Flüssigkeit (Terpentinöl) ist von Hrn. P. Silow schon im Jahre 1875 im hiesigen physikalischen Institute ausgeführt worden.²⁾

1) Quincke, Pogg. Ann. 156. p. 389. 1875.

2) Silow, Wied. Ann. 10. p. 161. 374. 513. 1880.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass die in (2^d) gegebene einfachere Normalform von \mathfrak{B} unverändert bleibt, wenn wir in ihr alle Coëfficienten $(1 + 4\pi\vartheta)$ sowie θ mit derselben Zahl N^2 multipliciren, dagegen alle Werthe von φ durch N dividiren, ε und e dagegen mit N multipliciren. Da nun aus dem Werthe von \mathfrak{B} sowohl die Gesetze der Vertheilung der Potentialwerthe im Raume, wie die Werthe der ponderomotorischen Kräfte hergeleitet werden, so bleiben diese alle unverändert, wie übrigens auch die oben in (4^e) aufgestellte Gleichung für ε und die Werthe für die Kräfte (p. 400 hinter (4^e)) erkennen lassen. Dadurch reducirt sich aber in den Gleichungen (5) der auf directe Fernwirkung der Electricität zurückgeführte erste Theil der Kraft auf $1/N^2$, sodass in dem Maasse, wie N^2 grösser wird, die directe Fernwirkung immer mehr gegen den von den dielectricischen Medien übertragenen Theil verschwindet. Das Quantum der freien Electricität, gemessen durch Δq , reducirt sich ebenfalls auf $1/N$ seines früheren Werthes. Für grosse Werthe von N verschwindet also freie Electricität und Fernwirkung, was zu Maxwell's Theorie hinüberführt. Diese Sätze, die ich schon am Schlusse meiner ersten Abhandlung über Electrodynamik aufgeführt habe, bestätigen sich also hier auch der vollständigeren Analyse der ponderomotorischen Kräfte gegenüber.

II. Ueber die Leitungsfähigkeiten der Metalle für Wärme und Electricität;

von G. Kirchhoff und G. Hanseman.

(Der Acad. der Wiss. zu Berlin vorgelegt am 12. Mai 1881.)

In einer früheren Abhandlung¹⁾ haben wir eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit von Metallen auseinandergesetzt und durch ein Beispiel erläutert. Wir hatten damals schon die Absicht, diese Methode auf

1) Kirchhoff u. Hanseman, Wied. Ann. 9. p. 1. 1880.

eine Reihe von Metallen anzuwenden und zugleich die electrischen Leitungsfähigkeiten derselben zu messen, um einen Beitrag zur Entscheidung der Frage zu liefern, ob das Verhältniss der beiden Leitungsfähigkeiten, der Vermuthung von Forbes, Wiedemann und Franz gemäss, constant ist. Wir haben nun in dieser Weise ausser dem Eisen, von dem in der citirten Abhandlung die Rede ist, zwei andere Eisensorten und je eine Sorte von Blei, Zinn, Zink und Kupfer untersucht und wollen hier die Resultate, zu denen wir dabei gelangt sind, angeben.

Die Versuche über die Wärmeleitung wurden alle ganz in der Art ausgeführt, die an dem angeführten Orte beschrieben ist; bei der Berechnung derselben für einige Metalle haben wir aber eine kleine Aenderung eintreten lassen, indem wir ein Glied berücksichtigten, welches beim Eisen unbedenklich vernachlässigt werden durfte, bei grösserer Leitungsfähigkeit aber einen merkbaren Einfluss ausüben konnte. Wir haben nämlich auf der rechten Seite der Gleichung (11) a. a. O. das Glied:

$$\int_0^t \varphi(t') dt' \frac{\partial R(t-t')}{\partial t}$$

hinzugefügt, wo $R(t)$ die dort mit R bezeichnete und durch die Gleichung (5) definirte Function von t bedeutet. Infolge hiervon musste in der Gleichung (15), nach der die numerischen Rechnungen zu führen waren, auf der rechten Seite hinzugefügt werden:

$$\int_0^U \left(\frac{2l - z - z_0}{2\sqrt{at}} \right) \left(E_0(t') - CU \left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}} \right) \right) dU,$$

wo:

$$U = U \left(\frac{2l - z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}} \right).$$

Die folgenden Tabellen enthalten die Ergebnisse dieser Versuche in derselben Anordnung, die auf p. 45 der angeführten Abhandlung benutzt ist. In derselben bezeichnet α die Leitungsfähigkeit, dividirt durch das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit, d. h. nach dem Ausdrucke des Hrn. H. F. Weber die Temperaturleitungs-

fähigkeit, bezogen auf Millimeter und Secunde als Einheiten, und ϑ ist die Temperatur in Celsius'schen Graden.

Eisen II. Bessemer Stahl der Dortmunder Union, enthaltend:

0,519% Kohle 0,343% Silicium.

Vers.- Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
1	$t = 145 \text{ Sec.}$	9,8	2,9	7,7	11,57	11,62	-0,05
2		8,4	2,1	6,5	11,68	11,64	+0,04
3		17,6	11,0	15,6	11,46	11,47	-0,01
4		14,4	8,9	12,7	11,56	11,52	+0,04
5		15,4	9,0	13,5	11,54	11,51	+0,03
6	$z = 70,25 \text{ mm}$	15,0	9,4	13,3	11,44	11,51	-0,07
7		16,8	23,5	18,8	11,46	11,41	+0,05
8		16,5	23,4	18,6	11,42	11,41	+0,01
9		17,0	23,6	19,0	11,40	11,40	0,00
10		17,1	23,7	19,1	11,41	11,40	+0,01
11		16,3	23,2	18,4	11,37	11,41	-0,04

$$a = 11,48 - 0,019 (\vartheta - 15).$$

Eisen III. Puddelstahl der Dortmunder Union, enthaltend:

0,254% Kohle 0,077% Silicium.

Vers.- Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
1	$t = 145 \text{ Sec.}$	15,5	8,4	13,1	16,40	16,42	-0,02
2		16,0	9,0	13,6	16,40	16,41	-0,01
3		15,7	8,8	13,3	16,48	16,42	+0,06
4		15,7	22,1	17,9	16,30	16,29	+0,01
5		17,2	24,5	19,7	16,28	16,24	+0,04
6	$z = 70,07 \text{ mm}$	17,7	25,2	20,2	16,28	16,24	+0,04
7		16,1	22,3	18,2	16,30	16,28	+0,02
8		16,8	23,1	18,9	16,14	16,27	-0,13
9		14,4	8,1	12,3	16,50	16,44	+0,06
10		10,2	4,4	8,2	16,50	16,55	-0,05

$$a = 16,37 - 0,027 (\vartheta - 15).$$

Blei. Clausthaler Weichblei.

Vers.- Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
1	$z = 70,52 \text{ mm}$ $t = 115 \text{ Sec.}$	16,8	11,0	13,8	24,15	24,06	+0,09
2		16,4	11,7	14,0	24,04	24,05	-0,01
3		16,7	11,3	13,9	24,09	24,06	+0,03
4		16,8	11,0	13,8	24,04	24,06	-0,02
5		16,1	10,5	13,2	24,04	24,10	-0,06

Vers.- Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
6	$z = 70,52 \text{ mm}$ $t = 115 \text{ Sec.}$	16,6	21,8	19,3	23,73	23,71	+0,02
7		16,1	22,4	19,4	23,68	23,71	-0,03
8		16,1	23,2	19,7	23,64	23,68	-0,04
9		16,3	23,1	19,8	23,73	23,68	+0,05
10		16,3	22,6	19,5	23,66	23,70	-0,04

$$a = 23,99 - 0,064 (\vartheta - 15).$$

Zinn. Bestes englisches Bancazinn.

Vers.- Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
1	$z = 70,03 \text{ mm}$ $t = 80 \text{ Sec.}$	14,4	9,8	12,2	38,88	38,89	-0,01
2		15,4	10,3	13,0	38,87	38,81	+0,06
3		14,8	9,8	12,5	39,00	38,87	+0,13
4		14,9	10,1	12,7	38,70	38,85	-0,15
5		15,7	10,6	13,3	38,70	38,78	-0,08
6		15,0	10,3	12,8	38,87	38,84	+0,03
7		16,1	20,3	18,1	38,16	38,28	-0,12
8		15,5	21,3	18,2	38,29	38,27	+0,02
9		15,8	20,9	18,2	38,24	38,27	-0,03
10		15,6	21,0	18,1	38,43	38,28	+0,15

$$a = 38,60 - 0,105 (\vartheta - 15).$$

Zink. WH Zink von G. v. Giesche's Erben.

Vers.- Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
1	$z = 70,73 \text{ mm}$ $t = 90 \text{ Sec.}$	15,5	11,9	—	40,46	40,49	-0,03
2		16,2	10,4	—	40,50	"	+0,01
3		16,3	10,5	—	40,42	"	-0,07
4		15,6	9,9	—	40,57	"	+0,08
5		14,8	10,7	—	40,50	"	+0,01
6		13,7	19,1	—	40,38	"	-0,11
7		14,5	21,5	—	40,46	"	-0,03
8		15,3	20,8	—	40,34	"	-0,15
9		16,6	21,6	—	40,62	"	+0,13
10		16,8	22,7	—	40,64	"	+0,15

Die Mittel aus den 5 ersten und aus den 5 letzten der beobachteten Werthe von a sind hier einander gerade gleich. Danach ist eine Abhängigkeit dieser Grösse von der Temperatur beim Zink nicht zu erkennen; es ist im Mittel:

$$a = 40,49.$$

Kupfer. Aus der Giesserei von C. Heckmann in Berlin;
nach später vorgenommener Analyse phosphorhaltig.

Vers.- Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
1	$\left. \begin{array}{l} \ell = 90 \text{ Secunden} \\ z = 63,79 \text{ mm} \end{array} \right\}$	15,5	20,1	21,4	50,77	51,13	-0,36
2		16,3	21,7	23,2	51,02	51,19	-0,17
3		17,8	23,4	25,0	51,29	51,24	+0,05
4		18,7	25,2	27,1	51,40	51,30	+0,10
5		20,2	25,8	27,4	51,31	51,31	0,00
6		20,7	15,0	13,3	51,02	50,90	+0,12
7		19,9	15,5	14,2	50,75	50,92	-0,17
8		19,8	14,6	13,1	50,79	50,89	-0,10
9		20,5	15,7	14,3	51,00	50,93	-0,07
10		19,8	14,6	13,1	50,56	50,89	-0,33
11		20,2	15,7	14,9	51,26	50,94	+0,32
12		19,5	15,8	15,1	51,05	50,95	+0,10
13		20,0	15,8	15,1	51,31	50,95	+0,36

$$a = 50,95 + 0,029(\vartheta - 15).$$

Der Temperaturcoefficient ist hier, was auffallen kann, positiv, während er bei Zink gleich Null, bei allen anderen Metallen sich negativ ergeben hatte. Sein Werth ist freilich überall sehr unsicher, da er aus Versuchen berechnet ist, bei denen die Temperatur nur um wenige Grade verschieden war, und er nur dazu dienen sollte, die Messungen auf eine Temperatur zu reduciren. Doch auch Hr. Tait¹⁾ hat aus seinen Versuchen, bei denen die Temperatur bis 300° C. gesteigert wurde, geschlossen, dass wahrscheinlich beim Kupfer die Temperaturleitungsfähigkeit bei steigender Temperatur zunimmt, während sie beim Eisen abnimmt. Zwar gibt er an, dass auch Blei sich wie Kupfer verhält; er legt hierauf aber nur ein geringes Gewicht, da er das Blei nicht über 100° C. erwärmte, und diese Temperatur zu niedrig war, um die Aenderungen der Leitungsfähigkeit bei seiner Methode mit einiger Sicherheit zu zeigen.

Um die electricische Leitungsfähigkeit der Metalle zu messen, liessen wir aus den benutzten Würfeln Stäbe von der Länge einer Kante und einem quadratischen Querschnitt von 3 bis 5 mm Seite sägen und schleifen. Es wurde die

1) Tait, Edinb. Trans. 28. p. 735. 1878.

Länge eines jeden Stabes, sein absolutes und spezifisches Gewicht bestimmt, hieraus sein Querschnitt berechnet und dann die Methode angewandt, deren Theorie einer von uns früher entwickelt hat.¹⁾

Bei dieser Methode war aus dem Stabe, dessen Leitungsfähigkeit bestimmt werden sollte, einem Widerstandsetalon und einer Kette eine Schliessung zu bilden; es waren dann dem Stabe und dem Etalon Nebenleitungen zu geben, die die beiden Gewinde eines Differentialgalvanometers enthielten, und deren Widerstände messbar verändert werden konnten. Der Stab ruhte in einem Petroleumbade, durch ein Gewicht belastet, horizontal mit den vier Ecken einer seiner langen Flächen auf vier federnden, isolirten Metallplättchen, von welchen zwei zur Zu- und Ableitung des Stromes der aus zwei Daniell'schen Elementen bestehenden Kette dienten, während die beiden anderen mit den Drähten verbunden waren, die zu dem einen Gewinde des Galvanometers führten. Als Etalon wurde ein ungefähr 9 m langer, 1,3 mm dicker Kupferdraht benutzt, der bifilar zu einer Spirale aufgewunden war und ebenfalls in einem Petroleumbade sich befand. Jedes der beiden Gewinde des Galvanometers bestand aus zwei Theilen von ungleicher Grösse; die beiden grösseren Theile bildeten die Hauptrolle, die die eine Nadel des astatischen Paares umgab, und wurden bei den Versuchen von Strömen von entgegengesetzten Richtungen durchflossen; die beiden kleineren bildeten eine Hilfsrolle, die neben jener sich befand und um eine verticale Axe drehbar war; in ihnen hatten die Ströme gleiche Richtung. Wurde derselbe Strom durch die beiden Gewinde geleitet, so konnte die Hilfsrolle so eingestellt werden, dass die Nadel des Galvanometers keine Winkelablenkung zeigte. War diese Einstellung für einen Strom von gewisser Intensität bewirkt, so galt dieselbe aber nicht mehr für einen Strom von erheblich verschiedener Intensität infolge der seitlichen Verschiebung, welche die Nadel durch die Wirkung des Stromes erfuhr, und welche um so grösser sein musste, je grösser die Inten-

1) Kirchhoff, Berl. Ber. 1880. p. 601.

sität des Stromes war. Um den Fehler zu vermeiden, den dieser Umstand bei unseren Messungen hervorbringen konnte, regulirten wir die Stellung der Hilfsrolle mit Hilfe von Strömen, deren Intensität nicht sehr verschieden von der Intensität derjenigen war, die dort wirkten. Wir hatten die Einrichtung getroffen, dass durch Umlegen einer Wippe die dort zu benutzende und schon beschriebene Anordnung in eine andere verwandelt werden konnte, bei der der Strom der Kette nur einmal in zwei Zweige sich theilte, von denen der eine den Stab, den Etalon und den diese verbindenden Draht, der andere die beiden Gewinde des Galvanometers und die hinzugefügten Drähte enthielt. Bei dieser Anordnung wurde die Hilfsrolle eingestellt. Wurde nun die Wippe rückwärts umgelegt und zeigte sich auch dann keine Galvanometerablenkung, so hatten die Widerstände der beiden Nebenleitungen das gesuchte Verhältniss. Geändert konnte dieses werden mit Hilfe eines Siemens'schen Widerstandsatzes, der in der Nebenleitung des Elatons sich befand und gestattete, Widerstände von 0,1 bis 10 000 S.-E. einzuführen. War der passende Widerstand dieser Nebenleitung gefunden, so wurde der der zweiten Nebenleitung um 0,5 oder um 1 S.-E. vergrössert und die entsprechende Vergrösserung des Widerstandes der ersten Nebenleitung bestimmt. Das Verhältniss dieser beiden Vergrösserungen war dann das Verhältniss der Widerstände des Stabes und des Etalons. Diese Bestimmungen liessen sich leicht und sicher ausführen, wenn die Belastung des Stabes nicht zu klein war und die Dauer der Ströme nicht zu kurz gewählt wurde. Die Temperaturen, für welche sie gelten, wurden an zwei Thermometern abgelesen, die in die Bäder tauchten, in denen der Stab und der Etalon sich befanden, und die mit Rührvorrichtungen versehen waren, welche durch einen kleinen Wassermotor in Bewegung erhalten werden konnten. Der Regel nach wurde das den Stab enthaltende Bad bis etwa 35° C. erwärmt und, während dasselbe von 30° bis auf die Zimmertemperatur unter fortwährendem Rühren sich abkühlte, eine Anzahl, meist 15, Widerstandsmessungen gemacht. Je drei von diesen wurden so schnell hintereinander ausgeführt, dass in den

Zwis
über
Ther
notir
pera
sprac

bei d
der
gefüh
einen
Vora
stand
schie
nach
geben

ermitt
kleins
D
solute
Ist a
sich h

Zwischenzeiten nur sehr kleine Temperaturänderungen, wenn überhaupt welche, sich zeigten; es wurden die Zeiten der Thermometerablesungen und der Widerstandseinstellungen notirt und mit ihrer Hülfe durch Interpolation die Temperaturen berechnet, die den gefundenen Widerständen entsprachen.

Um ein Urtheil über die Genauigkeit zu gewähren, die bei diesen Messungen erlangt ist, führen wir die Resultate der einzelnen Versuche an, die mit einem Bleistabe ausgeführt sind, bei dem grössere Differenzen, als bei irgend einem anderen der untersuchten Stäbe aufgetreten sind. Vorausgeschickt muss nur noch werden, dass der Widerstand des Elatons bei t° C. durch Vergleichung bei verschiedenen Temperaturen mit einem Siemens'schen Etalon nach der Methode der Wheatstone'schen Brücke sich ergeben hatte

$$= 0,1045 (1 + \alpha(t - 15)) \text{ S.-E., wo } \alpha = 0,003783.$$

Nr. des Versuchs	Temperatur t	Widerstand w_t		Differenz
		beobachtet	berechnet	
1	29,23	0,001 239	0,001 239	0
2	28,97	1 238	1 238	0
3	28,84	1 238	1 237	+1
4	25,64	1 226	1 223	+3
5	25,57	1 224	1 222	+2
6	25,53	1 224	1 222	+2
7—9	23,30	1 209	1 212	-3
10—12	21,75	1 201	1 204	-3
13—15	19,15	1 196	1 192	+4

Die berechneten Werthe von w_t sind nach der Formel:

$$w_t = 0,001174 (1 + \alpha(t - 15)), \quad \alpha = 0,003893$$

ermittelt, die aus den beobachteten nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet ist.

Die Länge dieses Bleistabes, l , war 142,0 mm, sein absolutes Gewicht 41,67 g, seine Dichtigkeit bei 15° C. 11,294. Ist a die Seite seines quadratischen Querschnitts, so ergibt sich hieraus $a^2 = 26,00$ und, nach der schon citirten theo-

retischen Untersuchung¹⁾, die electriche Leitungsfähigkeit bei 15° C., κ_{15} , diejenige des Quecksilbers bei 0° gleich 1 gesetzt:

$$= \frac{l - 0,7272 a}{w_{15} a^2} = 4,530.$$

In der folgenden Tabelle sind die auf dieselbe Weise bestimmten Leitungsfähigkeiten, κ_{15} , für die anderen untersuchten Stäbe enthalten. Hinzugefügt ist für jeden Stab die von uns ermittelte Dichtigkeit bei der Temperatur von 15° C., μ_{15} , und eine Angabe über die Lage, die seine Axe, bevor er ausgeschnitten war, in dem Metallwürfel gehabt hatte; dabei ist ein Coordinatensystem benutzt, dessen Axen mit drei Würfelkanten zusammenfallen, und zwar hatte bei den Versuchen, die über die Wärmeleitung des Würfels angestellt waren, die x -Axe die vertical aufwärts gekehrte Richtung, und die z -Axe ging von der Seitenfläche, die bespritzt wurde, nach der gegenüberliegenden. In einigen Fällen konnten wir nur Grenzen für die betreffenden Coordinaten anführen.

Metalle	Stab-Nr.	Lage des Stabes im Metallwürfel			κ_{15}	μ_{15}
Eisen I	1	$x=137$	y zwischen 3 u. 20	$z=0-140$	6,744	7,800
	2		wie 1		6,735	7,810
	3	$x=0-140$	$y=73$	$z=73$	6,708	7,764
	4	$x=0-140$	$y=73$	$z=65$	6,643	7,778
	5	$x=63$	$y=78$	$z=0-140$	6,803	7,789
Eisen II	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	4,121	7,815
	2		wie 1		4,151	7,816
	3	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	4,082	7,818
	4	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	4,037	—
Eisen III	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	6,871	7,836
	2		wie 1		7,119	7,832
	3	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	6,577	7,821
	4	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	6,561	7,821
Blei	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	4,538	11,310
	2		wie 1		4,530	11,294
	3		wie 1		4,527	—
	4	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	4,568	11,324
	5	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	4,569	11,315

1) G. Kirchhoff, Berl. Ber. 1880. p. 601.

Metalle	Stab-Nr.	Lage des Stabes im Metallwürfel			κ_{15}	μ_{15}
Zinn	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	7,938	7,309
	2		wie 1		8,032	7,308
	3		wie 1		7,896	—
	4	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	8,837	7,306
	5	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	8,808	7,306
Zink	1	$x=137$	y zwischen 3 u. 20	$z=0-140$	14,64	7,187
	2		wie 1		14,50	7,185
	3		wie 1		14,28	—
	4	$x=68$	$y=65$	$z=0-140$	14,80	7,155
	5	$x=68$	$y=72$	$z=32-140$	14,85	7,161
Kupfer	1	$x=137$	y zwisch. 3 u. 20	$z=0-140$	21,67	8,891
	2		wie 1		22,23	8,886
	3		wie 1		21,42	—
	4	$x=90$	$y=50$	$z=0-140$	24,04	8,882
	5	$x=69$	$y=67$	$z=0-140$	24,06	8,888
	6	$x=69$	$y=73$	$z=0-140$	24,01	8,886

Wie aus dieser Tabelle ersichtlich ist, weichen die Werthe der Leitungsfähigkeit für die verschiedenen Stäbe desselben Metalls sehr erheblich von einander ab, während die Dichtigkeiten nur unbedeutende Unterschiede darbieten. Der Mangel an Homogenität, der hierin sich zeigt, trat auffallender noch bei Versuchen hervor, bei welchen wir die electriche Leitungsfähigkeit verschiedener Theile derselben Stäbe gemessen haben. Es wurde bei diesen der zu untersuchende Stab stückweise verkürzt, nach jeder Verkürzung sein Widerstand gemessen und aus dem Widerstande, der Länge und dem aus dem Gewichte ermittelten Querschnitt vor und nach jeder Verkürzung die Leitungsfähigkeit des abgetrennten Stückes berechnet. So ergab sich:

für den Kupferstab Nr. 6

für $z=0-10,1$ 10,1-20,2 20,2-30,1 30,1-40,1 40,1-50,1 50,1-60,2
 $\kappa_{15} = 20,98$ 21,86 22,75 23,83 25,33 26,39

für $z=60,2-70,2$ 70,2-140,2
 $\kappa_{15} = 26,18$ 24,25

für den Zinnstab Nr. 5

für $z=0-10,3$ 10,3-20,5 20,5-30,5 30,5-50,5 50,5-70,4 70,4-140,4
 $\kappa_{15} = 9,501$ 8,876 8,943 9,036 8,574 8,760

für den Zinnstab Nr. 4

für $z = 130,3-140,4$	109,8-130,3	69,4-109,8	0-69,4
$\alpha_{15} = 9,139$	8,908	8,806	8,798

für den Eisenstab III Nr. 3

für $z = 0-20,3$	20,3-50,1	50,1-70,9	70,9-140,2
$\alpha_{15} = 6,841$	6,829	6,236	6,510

für den Zinkstab Nr. 4

für $z = 0-19,9$	19,9-39,9	39,9-59,9	59,9-70,1	70,1-140,3
$\alpha_{15} = 14,43$	14,54	14,74	14,72	15,02

für den Bleistab Nr. 4.

für $z = 0-19,7$	19,7-39,4	39,4-59,2	59,2-69,1	69,1-140,6
$\alpha_{15} = 4,643$	4,677	4,517	4,461	4,539

Eine Controle für diese Zahlen erhält man, indem man durch Mittelnehmen aus ihnen die mittleren Leitungsfähigkeiten der einzelnen Stäbe berechnet und diese vergleicht mit den direct gefundenen Werthen derselben. Die Mittel sind:

24,08	8,847	8,840	6,586	14,81	4,565
-------	-------	-------	-------	-------	-------

und die direct gemessenen Leitungsfähigkeiten, der obigen Tabelle zufolge:

24,01	8,808	8,837	6,577	14,80	4,568
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Wie man sieht, steigen bei dem Kupferstabe die Differenzen der Leitungsfähigkeit bis zu 25 Proc. ihres Werthes. Wegen Mangels an Homogenität der benutzten Würfel erlauben daher unsere Versuche nicht mit der Sicherheit, die zu erreichen wir gehofft hatten, die Frage zu entscheiden, ob das Verhältniss der Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität bei den untersuchten Metallen ein constantes ist, da die Mittelwerthe der beiden Leitungsfähigkeiten, welche unsere Methoden ergeben, von verschiedener Art sind. Will man aus den Versuchen mit der grösst möglichen Wahrscheinlichkeit die Frage beantworten, so muss man ohne Zweifel die für die Wärmeleitungsfähigkeit gefundenen Werthe mit denjenigen Werthen der electrischen Leitungsfähigkeit combiniren, welche für Stäbe gelten, die aus den Würfeln nahe der Mitte in der Richtung der z -Axe ausgeschnitten sind. Die folgende Zusammenstellung enthält für diese Stäbe die Mittel der electrischen Leitungsfähigkeiten α_{15} , die Dich-

tigkeiten μ_{15} , die specifischen Wärmen nach Bède¹⁾ s_{15} , die Temperaturleitungsfähigkeiten α_{15} , die Wärmeleitungsfähigkeiten k_{15} und die Verhältnisse der Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität, alles für 15° C.

Metalle	α_{15}	μ_{15}	s_{15}	α_{15}	k_{15}	$\frac{k_{15}}{\alpha_{15}}$
Eisen I. Stab 5	6,803	7,789	0,1074	16,94	14,18	2,08
Eisen II. Stab 3 u. 4	4,060	7,818	0,1074	11,48	9,64	2,37
Eisen III. Stab 3 u. 4	6,569	7,821	0,1074	16,37	13,75	2,09
Blei. Stab 4 u. 5	4,569	11,320	0,0292	23,99	7,93	1,74
Zinn. Stab 4 u. 5	8,823	7,306	0,0513	38,60	14,46	1,64
Zink. Stab 4 u. 5	14,83	7,158	0,0878	40,49	25,45	1,72
Kupfer. Stab 5 u. 6	24,04	8,887	0,0917	50,95	41,52	1,73

Die Zahlen der letzten Columnne scheinen zu zeigen, dass das Verhältniss der beiden Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität im allgemeinen bei den verschiedenen Metallen denselben Werth besitzt, beim Eisen aber ein anderes ist. Vielleicht hängt diese Ausnahmestellung des Eisens mit seinen magnetischen Eigenschaften zusammen.²⁾

Zu diesem Schlusse waren wir gekommen, als eine Arbeit³⁾ von Hrn. H. F. Weber in Zürich erschien, die auf denselben Gegenstand sich bezieht und zu einem wesentlich anderen Resultate gelangt. Hr. Weber findet nämlich, dass das Verhältniss zwischen den Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität bei den Metallen nicht constant ist, sondern eine lineare Function des Productes aus specifischer Wärme und Dichtigkeit oder der „specifischen Wärme der Volumeneinheit“, wie er dieses Product nennt. Bei Zugrundelegung gewisser, von den unserigen theilweise verschiedener Einheiten erhält er:

1) Bède, Fortschritte der Physik. p. 379. 1855.

2) Einige Versuche, die wir über das magnetische Verhalten der drei Eisensorten angestellt haben, zeigten, dass die Coërcitivkraft bei den Sorten I und III, für die das Verhältniss k/α das gleiche war, denselben Werth besass, bei der Sorte II aber, für welche k/α erheblich grösser sich ergeben hatte, viel bedeutender war.

3) H. F. Weber, Monatsber. der Acad. der Wissensch. zu Berlin, Mai 1880.

$$\frac{k_0}{\kappa_0} = 0,0877 \cdot 10^4 + 0,1360 \cdot 10^4 c_0,$$

wo k_0 die Leitungsfähigkeit für Wärme, κ_0 diejenige für Electricität und c_0 die specifische Wärme der Volumeneinheit für 0° C. bezeichnet, und diese Gleichung stellt mit überraschender Genauigkeit seine an 10 verschiedenen Metallen ausgeführten Messungen dar, bei denen c_0 von 0,827 bis 0,293 variirt.

Um wo möglich den Grund der auffallenden Abweichungen unserer Versuchsergebnisse von dem Weber'schen Gesetze zu finden, haben wir zwei der von uns benutzten Metalle, nämlich Zink und Blei, einer weiteren Untersuchung unterworfen. Wir wählten diese Metalle, weil bei ihnen der Mangel an Homogenität sich weniger gross, als bei den übrigen (abgesehen vom Eisen) gezeigt hatte, und zugleich die specifische Wärme der Volumeneinheit bei ihnen recht verschiedene Werthe besitzt.

Wir veranlassten zunächst eine chemische Analyse derselben, die in dem Laboratorium der landwirthschaftlichen Academie zu Berlin unter Leitung des Hrn. Landolt ausgeführt ist. An fremden Bestandtheilen ergaben sich dabei im Zink:

Zinn	0,9406 Proc.	Arsen	0,0283 Proc.
Blei	0,7212 „	Cadmium	0,0099 „
Kupfer	0,0785 „	Eisen	0,0061 „
Antimon	0,0313 „		

und quantitativ nicht bestimmbare Spuren von Mangan und Schwefel; im Blei:

Antimon	0,1399 Proc.	Eisen	0,0032 Proc.
Kupfer	0,0515 „	Wismuth	0,0027 „
Zink	0,0222 „	Cadmium	0,0023 „

und quantitativ nicht bestimmbare Spuren von Silber, Mangan und Arsen.

Hr. Weber hat sein Gesetz nur für metallische Körper aufgestellt; wir hatten es für möglich gehalten, dass in unseren Würfeln von Zink und Blei so viel von nicht-metallischen Körpern sich befände, das infolge hiervon das Weber'sche Gesetz bei ihnen nicht zuträfe; diese Vermuthung ist als durch die Analyse widerlegt anzusehen.

Wir haben ferner die specifische Wärme unserer beiden Metalle mit Hülfe des Bunsen'schen Eiscalorimeters bestimmt, um die Gültigkeit der Bède'schen Angaben für dieselben zu controliren. Um die specifische Wärme bei 15°C . berechnen zu können, erwärmten wir den zu untersuchenden Körper, bevor er in das Calorimeter gebracht wurde, bei einigen Versuchen auf die Temperatur der Dämpfe siedenden Wassers, bei anderen auf eine niedrigere, scharf messbare Temperatur. Wir haben hierbei eine Methode benutzt, ein Wasserbad längere Zeit auf einer constanten Temperatur zu erhalten, die sich als recht zweckmässig erwiesen hat, und die deshalb beschrieben werden möge.

Das warme Wasser befand sich in einem oben mit einer Abflussröhre versehenen, cylindrischen Gefäss von Zinkblech von etwa 25 cm Höhe und 20 cm Weite, das doppelte Wandungen besass, deren Zwischenraum mit gebrannter Infusorienerde ausgefüllt war. In ihm war eine rotirende Rührvorrichtung angebracht, die durch einen Wassermotor in Bewegung erhalten wurde und bewirkte, dass eintretende Temperaturverschiedenheiten sehr schnell sich ausgleichen mussten. Ferner tauchten in das Wasser, vor der Berührung mit ihm durch ein Messingröhrchen geschützt, die Löthstellen gerader oder ungerader Ordnungszahl einer Thermosäule, die aus Eisen- und Neusilberdrähten bestand, und deren übrige Löthstellen durch Schnee auf 0°C . erhalten wurden. Die Löthstellen einer zweiten Thermosäule, die aus eben solchen Drähten bestand, aber weniger Elemente enthielt, tauchten in ähnlicher Weise einerseits in einen von den Dämpfen siedenden Wassers umspülten Raum, andererseits in Schnee. Diese beiden Thermosäulen waren mit einem sehr empfindlichen, aperiodischen Galvanometer so zu einem Kreise verbunden, dass sie einander entgegenwirkten. Durch einen Kautschukschlauch, der mit Hülfe einer Klemmvorrichtung leicht geschlossen und geöffnet werden konnte, communicirte das Zinkgefäss mit einem höher stehenden Kessel, welcher siedendes Wasser enthielt. Durch Handhabung dieser Klemmvorrichtung suchte der Beobachter am Galvanometer die Nadel in der-

jenigen Stellung zu erhalten, die sie bei geöffnetem Kreise hatte, und das gelang leicht soweit, dass die Ablenkung nie mehr als einige wenige Scalentheile betrug; eine solche Ablenkung entsprach, wenn der Barometerstand derselbe blieb, einer Temperaturänderung des Wassers von weniger als $0,01^{\circ}\text{C}$. Gemessen wurde die Temperatur des Wassers an einem Luftthermometer, dessen Gefäss in demselben sich befand. Um eine Temperatur von etwa 50°C . zu erhalten, wurde einerseits eine Thermosäule von zwei Elementen, andererseits ein einzelnes Element benutzt; um dem Wasser eine Temperatur von etwa 67°C . zu geben, mussten Thermosäulen von drei und zwei Elementen angewandt werden.¹⁾

So fanden wir für Zink:

$$s_t = 0,09171 (1 + 0,00027 t)$$

und für Blei:

$$s_t = 0,03014 (1 + 0,00054 t),$$

wenn die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 0 und 100°C . als Einheit angenommen wird. Daraus folgt die specifische Wärme bei 15°C ., s_{15} :

$$\text{für Zink} = 0,0921, \text{ für Blei} = 0,0304,$$

während sie nach Bède:

$$= 0,0878 \quad \text{und} \quad = 0,0292$$

sein sollte. Obwohl jene Zahlen von diesen nicht unerheblich abweichen, so ergeben doch die einen wie die anderen das Verhältniss k_{15}/α_{15} als nahe gleich für die beiden Metalle.

Wir stellen in der folgenden Tafel die von Hrn. Weber für Zink und Blei gemachten Angaben mit den entsprechenden von uns gefundenen Werthen zusammen, die auf die von Hrn. Weber benutzten Einheiten reducirt sind, indem die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers $= 1,047 \cdot 10^{-5}$, wie er sie gefunden hatte, gesetzt ist.

1) Eine solche Anordnung würde sehr zweckmässig sein zur Prüfung der von Hrn. Avenarius aufgestellten Beziehung zwischen der electromotorischen Kraft einer Thermokette und den Temperaturen ihrer Löthstellen.

	Zink		Blei	
	Weber	K. und H.	Weber	K. und H.
c_0	0,662	0,657	0,340	0,342
k_0	0,3056	0,2662	0,0719	0,0853
κ_0	$17,43 \cdot 10^{-5}$	$16,41 \cdot 10^{-5}$	$5,351 \cdot 10^{-5}$	$5,082 \cdot 10^{-5}$
k_0/κ_0	$0,1753 \cdot 10^4$	$0,1622 \cdot 10^4$	$0,1345 \cdot 10^4$	$0,1678 \cdot 10^4$

Den Grund der Unterschiede, die hier sich zeigen, haben wir in unserer Arbeit nicht finden können. Ob die Versuche und Rechnungen, durch welche Hr. Weber zu seinen Resultaten gelangt ist, einwurfsfrei sind, können wir nicht beurtheilen, da der Auszug aus seiner Arbeit, der allein veröffentlicht ist, die Handhaben hierzu nicht darbietet. Nicht gerechtfertigt aber finden wir die Art, wie Hr. Weber die Zahlen, die Hr. F. Neumann¹⁾ bei seinen Versuchen über die Wärmeleitung in Metallen erhalten hat, als Bestätigung seiner eigenen hinstellt. Aus jenen Zahlen berechnet er die Constanten a und b seiner Formel:

$$\frac{k}{\kappa} = a + b \cdot c.$$

Die absoluten Werthe derselben lassen einen Vergleich mit den aus seinen eigenen Versuchen abgeleiteten nicht zu, da Hr. Neumann für die electricischen Leitungsfähigkeiten eine nicht genau bestimmbare Einheit benutzt hat; das Verhältniss beider, das von dieser Einheit unabhängig ist, findet er nach Neumann = 1,545, während seine eigenen Versuche es = 1,550 ergeben hatten. Die fast völlige Gleichheit dieser Zahlen scheint in schlagender Weise den Anspruch des Hrn. Weber zu rechtfertigen, dass die Ergebnisse des Hrn. Neumann in guter Uebereinstimmung mit den seinigen sind, und eine wichtige Bestätigung der letzteren zu gewähren. Erwägt man aber, auf welchem Wege die Zahl 1,545 berechnet ist, und mit wie geringer Genauigkeit die Neumann'schen Resultate durch die Weber'sche Formel dargestellt werden, so zeigt sich jene Gleichheit als ein Zufall, dem eine Bedeutung nicht beizulegen ist. Die Neumann'schen Versuche beziehen sich auf die Metalle:

1) Neumann, Ann. de chim. et de phys. (3) 66. p. 185. 1862.

Kupfer, Messing, Neusilber, Eisen und Zink
und ergeben für das Verhältniss k/x die Werthe¹⁾:

17,5 19,8 19,9 18,9 17,1.

Als entsprechende Werthe von c benutzt Hr. Weber:

0,83 0,80 0,80 0,84 0,67.

Für die vier ersten Metalle setzt er nun k/x und c gleich den Mittelwerthen 19,05 und 0,82 und berechnet aus diesen und den für Zink angegebenen Zahlen a und b . Er findet so $a = 8,4$, $b = 13,0$, woraus er schliesst $b/a = 1,545$. Berechnet man aber rückwärts mit diesen Werthen von a und b das Verhältniss k/x für die fünf Metalle, so ergibt sich:

19,2 18,8 18,8 19,3 17,1.

Bei der Grösse der Differenzen zwischen diesen Zahlen und den von Hrn. Neumann gefundenen ist auf die Uebereinstimmung der Verhältnisse 1,545 und 1,550 ein Gewicht nicht zu legen. Aus den eigenen Versuchen hat Hr. Weber die Werthe von a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; behandelt man die Neumann'schen Versuche ebenso, so ergibt sich aus ihnen $b/a = 0,84$ statt $= 1,550$.

III. *Ueber das Leitungsvermögen der Metalle für Wärme und Electricität; von L. Lorenz in Kopenhagen.*

Die theoretischen Betrachtungen, welche der einen der beiden Methoden, durch welche ich das Leitungsvermögen verschiedener Metalle für die Wärme zu bestimmen versucht habe, zu Grunde liegen, sind folgende.

Man denke sich eine Stange an dem einen Ende erwärmt. In einer von einem willkürlichen Punkte innerhalb der Stange gerechneten Entfernung x sei die variable Temperatur u_x , wobei der Nullpunkt der Temperaturscala von

1) Dieses ist die Angabe von Hrn. Weber; statt der Zahl 17,5 steht in der Abhandlung des Hrn. Neumann 17,6, und die Division der dort angeführten Leitungsfähigkeiten gibt 17,8.

der
ger
n +
Sta

$x =$
wir
die
tun
Sta
 kq

ges
Sta
thei
Um

und
wer
Gra
Wä
beze
Ten
glei
Zeit
Wä
kön

gese

eine
als
trac
pera
den

(1)

der constant angenommenen Temperatur der Umgebungen gerechnet ist. So sind $u_0, u_1, \dots u_{n-1}$ die Temperaturen in $n+1$, um die Länge l voneinander entfernten Punkte der Stange.

Derjenige Theil der Stange, welcher zwischen zwei $x = \frac{1}{2}l$ und $x = (n - \frac{1}{2})l$ entsprechenden Schnitten gelegen ist, wird von der einen Seite durch Leitung in der Zeiteinheit die Wärmemenge $kq(u_0 - u_1)/l$ empfangen, wenn k das Leitungsvermögen für die Wärme und q der Querschnitt der Stange ist, während zur anderen Seite die Wärmemenge $kq(u_{(n-1)l} - u_{nl})/l$ abgeleitet wird. Wenn also:

$$u_0 - u_1 - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta$$

gesetzt wird, so ist $kq\Delta$ die von dem betrachteten Theile der Stange in jeder Zeiteinheit empfangene Wärmemenge, welche theils zur Erwärmung des Metalles verbraucht, theils zu den Umgebungen abgeleitet wird.

Das betrachtete Stück der Stange hat die Länge $(n-1)l$ und kann in $n-1$ gleich grosse Theile zerlegt gedacht werden. Die Erwärmung eines jeden dieser Theile um einen Grad erfordert $c\delta q l$ Wärmeeinheiten, wenn durch c die Wärmecapacität und durch δ die Dichtigkeit des Metalles bezeichnet wird, und da die der Zeiteinheit entsprechende Temperaturerhöhung in dem Mittelpunkt jedes dieser Theile gleich $du_1/dt, du_{2l}/dt, \dots du_{(n-1)l}/dt$ ist, so wird die in der Zeiteinheit zur Erwärmung der $n-1$ Theilchen erforderliche Wärmemenge durch $c\delta q l (d\Sigma/dt)$ ausgedrückt werden können, wenn:

$$u_1 + u_{2l} + \dots u_{(n-1)l} = \Sigma$$

gesetzt wird.

Die an die Umgebung abgegebene Wärmemenge ist eine Funktion der Temperatur, und annähernd kann dieselbe als eine Funktion der mittleren Temperatur $\Sigma/(n-1)$ betrachtet werden, wenn vorausgesetzt wird, dass die Temperaturen der verschiedenen Theilchen nicht sehr verschieden sind.

Wir erhalten demnach die Gleichung:

$$(1) \quad \frac{kq}{l} \Delta = c\delta q l \frac{d\Sigma}{dt} + f(\Sigma).$$

Wenn also zunächst die Stange an dem einen Ende erwärmt wird, während man den zeitlichen Verlauf von Δ und Σ unmittelbar (mittelst thermoelectrischer Elemente) beobachtet, und wenn man nachher mit der Erwärmung aufhört, wodurch Δ bald in einen anderen sehr kleinen Werth Δ' übergeht, während Σ aufs neue die früher beobachteten Werthe rückwärts durchläuft, so wird für die letztere Beobachtungsreihe die Gleichung:

$$\frac{kq}{l} \Delta' = c\delta q l \frac{d\Sigma'}{dt} + f(\Sigma')$$

erhalten. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Subtraction für $\Sigma' = \Sigma$:

$$\frac{kq}{l} (\Delta - \Delta') = c\delta q l \left(\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt} \right),$$

wo $d\Sigma/dt$ positiv und $d\Sigma'/dt$ negativ ist. Es wird also aus einer einzelnen Beobachtungsreihe eine Reihe Bestimmungen von $(c\delta/k) l^2$ hervorgehen.

Diese Methode kann noch ein wenig genauer gemacht werden. Um dieses nachzuweisen, und um zugleich Einsicht in die Grösse der Fehler, welche aus den nur annähernd richtigen Voraussetzungen der obigen Berechnung entspringen mögen, zu erlangen, wird es indessen nothwendig sein, zu der Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einer Stange zurückzugehen, nämlich:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} kq \frac{du}{dx} = c\delta q \frac{du}{dt} + phu,$$

wo p der Perimeter der Stange und h der Coëfficient der äusseren Wärmeleitung ist. Alle Coëfficienten müssen hier als Functionen von u betrachtet werden, allein wenn die Temperatur u und deren Aenderungen als klein vorausgesetzt werden, so wird mit genügender Annäherung gesetzt werden können:

$$\frac{c\delta}{k} = a_0 (1 + \alpha u), \quad \frac{ph}{kq} = b_0 (1 + \beta u), \quad kq = k_0 q_0 e^{\gamma u},$$

indem diese neu eingeführten Coëfficienten als constant betrachtet werden. Die Differentialgleichung wird alsdann:

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = a_0 (1 + \alpha u) \frac{du}{dt} + b_0 (1 + \beta u) u - \gamma \left(\frac{du}{dx} \right)^2,$$

Man sieht leicht, dass:

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} \frac{d^2 u}{dx^2} = u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta$$

ist. Ferner ergibt sich für eine beliebige Function f :

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx f(x) = l^2 (f(l) + f(2l) + \dots + f((n-1)l)) \\ + \frac{l^3}{12} (f(nl) - f((n-1)l) - f(l) + f(0)) + \dots,$$

wo der Ausdruck rechter Hand auch in:

$$l^2 (f(\frac{1}{2}l) + f(2l) + \dots + f((n-2)l) + f((n-\frac{1}{2})l)) + \dots$$

umgebildet werden kann.

Mit einer kleinen Aenderung der früheren Bedeutung von Σ , nämlich in:

$$(4) \quad \Sigma = u_{\frac{1}{2}l} + u_{2l} + \dots + u_{(n-2)l} + u_{(n-\frac{1}{2})l},$$

erhalten wir demnach aus (3) durch die angegebene doppelte Integration annäherungsweise:

$$(5) \quad \Delta = a_0 l^2 \frac{d\Sigma}{dt} + b_0 l^2 \Sigma + \int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \left(a_0 \alpha u \frac{du}{dt} + b_0 \beta u^2 - \gamma \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right).$$

Das letztere Integral wird, wenn die Werthe von u nur klein sind, als eine gegen die übrigen Glieder der Gleichung sehr kleine Grösse betrachtet werden können. Die Berechnung dieses Integrals kann deshalb mit genügender Annäherung mittelst der einfachen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = a_0 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

ausgeführt werden, indem diese Gleichung unter den bei den Versuchen stattfindenden Bedingungen integrirt wird. Es muss dabei bemerkt werden, dass die Erwärmung der Stange so geleitet wird, dass Δ sich während der Messungen nahezu constant hält. Diese Bedingung wird durch ein Integral von der Form:

$$u = A e^{x\sqrt{b_0}} + B e^{-x\sqrt{b_0}} + C e^{-\frac{b_0}{a_0} t}$$

befriedigt sein, und wenn schon auch andere Formen von Integralen hier möglich sind, so darf doch angenommen

werden, dass der obige Ausdruck im wesentlichen den Temperaturzustand der Stange während der Messungen wird darstellen können.

Der Anfangspunkt, in welchem die Temperatur u_0 gemessen, ist in der Entfernung $\frac{1}{2}l$ vom Stabende gelegen. Da die Wärmeabgabe am Ende der Stange nur klein ist, wird deshalb annähernd $du/dx = 0$ für $x = -\frac{1}{2}l$ gesetzt werden können.

Man kann jetzt die Constanten eliminiren, wonach man findet:

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx u^2 = l^2 \frac{\Sigma^2}{n-1} + l^2 A^2 f,$$

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = A^2 g,$$

indem f und g gewisse, allein von $l^2 b_0$ abhängige Zahlen sind.

Für:

$$l^2 b_0 = 0,01 \quad 0,0225 \quad 0,04 \quad 0,09 \quad 0,16$$

erhalten f und g die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{ccccc} f = 11,08 & 9,34 & 7,66 & 4,86 & 3,05 \\ g = 3,13 & 2,78 & 2,40 & 1,76 & 1,33, \end{array}$$

welche Werthe sehr nahe durch die empirischen Formeln:

$$f = \frac{68}{5 + 100 l^2 b_0}, \quad g = \frac{34}{10 + 100 l^2 b_0}$$

ausgedrückt werden können.

Wird ferner:

$$f b_0 l^2 \beta - g \gamma = \eta, \quad a_0 \left(1 + \frac{\Sigma}{n-1} \alpha \right) = a, \quad b_0 \left(1 + \frac{\Sigma}{n-1} \beta \right) = b$$

gesetzt, indem also a und b die der mittleren Temperatur $\Sigma/(n-1)$ entsprechenden Werthe von $c\delta/k$ und ph/kq sind, so erhält die Gleichung (5) die einfache Form:

$$(6) \quad A(1 - \eta A) = a l^2 \frac{d\Sigma}{dt} + b l^2 \Sigma.$$

Da alle die in η eingehenden Grössen aus den Versuchen selbst hergeleitet werden können, habe ich die in dem Gliede ηA enthaltene Correction für alle meine Versuche berechnen können, und es hat sich alsdann gezeigt, dass für alle besser

leitende Metalle diese Correction ohne Belang ist. Dasselbe gilt auch für das schlecht leitende Neusilber, indem hier γ ausnahmsweise einen positiven Werth annimmt, dagegen beträgt die Correction für Antimon bei meinen Versuchen gegen 5 Procent, und für Wismuth sogar gegen 10 Procent, um welchen Bruchtheil der gefundene Werth von a kleiner gemacht werden muss.

Indem also ηA gleich 0 gesetzt wird, erhalten wir, wenn die Versuche wie oben angegeben ausgeführt werden, zur Berechnung von a die Gleichung:

$$(7) \quad a l^2 = \frac{A - A'}{\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt}}.$$

Es muss noch bemerkt werden, dass aus den Versuchen die Werthe von $d\Sigma/dt$ nicht unmittelbar hervorgehen. Die Versuche sind so angestellt, dass die, gegebenen Werthen von Σ , wie $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, entsprechenden Zeitmomente t_0, t_1, t_2, \dots bestimmt werden, indem die Σ mit constanten Differenzen zu- oder abnehmen. Wenn t der dem $\Sigma = (\Sigma_{m-1} + \Sigma_m)/2$ entsprechende Zeitmoment ist, so hat man:

$$(8) \quad \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\Sigma_m - \Sigma_{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \left(l + \frac{1}{12} \frac{b^2}{a^2} (t_m - t_{m-1})^2 + \dots \right),$$

wo schon das zweite Glied der Reihenentwicklung in meinen Versuchen nur einen äusserst kleinen Werth erreicht. Dasselbe wird doch immer mit in Rechnung gezogen werden.

Die zu meinen Untersuchungen verwendeten Metalle waren: Kupfer, Magnesium, Aluminium, Cadmium, Eisen, Zinn, Blei, Antimon und Wismuth, und von Legirungen rothes und gelbes Messing und Neusilber. Aus diesen Metallen liess ich cylindrische Stangen verfertigen, die 30 cm in der Länge und 1,5 cm im Durchmesser hielten. Diese Stangen wurden mit einer Reihe von sehr feinen, nur 0,4 mm weiten Löchern durchbohrt, von welchen eins, das besonders für die Messungen der electricischen Widerstände bestimmt war, 1 cm von dem einen Ende der Stange entfernt

war, während in derselben Entfernung vom anderen Ende der Stange eine Reihe von 9, um 2 cm von einander entfernten, ähnlichen Löchern angingen, welche Löcher ich durch 0, 1, 2, ... 8 bezeichnen werde. Alle diese Löcher waren parallel und durch die Mitte der Stange gebohrt. Ausserdem war noch ein Loch zwischen 0 und 1, $\frac{1}{4}$ cm von 1 entfernt, sowie zwischen 7 und 8, $\frac{1}{4}$ cm von 7 entfernt, senkrecht zu den anderen Löchern und ein wenig excentrisch gebohrt. Ich werde diese beiden Löcher mit 1' und 7' bezeichnen.

In diesen Löchern wurden die Thermoelemente angebracht. Sie bestanden in der Regel aus einem 0,1 mm dicken Kupferdraht und einem 0,3 mm dicken Neusilberdraht. Die Löthstelle war mit einigen von der Seide des übersponnenen Kupferdrahtes abgewickelten Fäden umwickelt, während der dickere Uebergang des Neusilberdrahtes, wenn der Kupferdraht durch das Loch hindurch gezogen war, einen Vorsprung bildete, wodurch die Löthstelle gerade mitten in der Stange festgehalten wurde. Das Thermoelement war von der Stange vollständig isolirt, was jedesmal besonders untersucht wurde.

Zu den beiden Löchern 0 und 1, sammt 7 und 8, wurden thermoelectrische Doppелеlemente benutzt, welche aus kurzen, mit den beiden Enden an Kupferdrähten angelötheten Neusilberdrähten bestanden. Diese Doppелеlemente gaben also die Temperaturdifferenzen der Löcher 0 und 1, 7 und 8 an. Ausserdem wurden noch die von 0 und 7 kommenden Kupferdrähte dieser Elemente zusammen gelöthet, sodass die thermoelectrische Differenz der beiden von 1 und 8 kommenden Kupferdrähte der in der obigen Rechnung durch A bezeichneten Temperaturdifferenz entspricht.

Ferner wurden sieben Thermoelemente in den sieben Löchern 1', 2, 3 ... 6, 7' angebracht und zu einer Kette verbunden, in der Weise, dass alle ausserhalb der Stange befindlichen Löthstellen während der Versuche in einem besonderen Raum, welcher auf der Temperatur der Umgebung gehalten wurde, angebracht waren. Die electriche Differenz

der Endpunkte dieser Kette entsprach also der in der Gleichung (4) durch Σ bezeichneten Temperatursumme.

Die beiden von 8 und 1' kommenden Kupferdrähte waren an einen 1 mm dicken Kupferdraht G (Taf. III Fig. 1) angelöthet, während der von 1 kommende Kupferdraht mit dem Drahte D und der von 7' kommende Neusilberdraht mit S verbunden war. Die electricischen Differenzen zwischen G und D und zwischen G und S entsprachen also den zu messenden Temperaturgrößen A und Σ .

Die Stange wurde danach in den in der Figur dargestellten Erwärmungsapparat eingesetzt. Derselbe bestand aus einem geschlossenen Cylinder A (47 cm lang, 10,5 cm im Durchmesser), durch welchen ein an beiden Enden offenes, 4,3 cm weites Rohr B hindurch ging, alles aus Messing und mit starken Wanddicken. Dieser Apparat wurde entweder durch einen von a nach b gehenden Wasserstrom auf der Temperatur der Wasserleitung gehalten oder durch einen von b nach a geleiteten Dampfstrom auf 100° erwärmt. Die Stange war in das innere Rohr mittelst zwei Korkpfropfen eingesetzt, ein dritter, nicht dicht schliessender Korkpfropfen diente als Schirm und nöthigte die von dem erwärmten Ende e der Stange kommende Luft, dicht an den Röhrenwänden vorbeizustreichen. Die Thermoelemente waren durch kleine Löcher in dem an das andere Ende der Stange angebrachten Korkpfropfen hindurchgezogen, in der Weise, dass alle diejenigen Löthstellen der Thermoelemente, welche auf der Temperatur des Erwärmungsapparates gehalten werden sollten, sich in dem Raume e befanden, wo sie von lockerer Baumwolle umgeben waren. Die drei oben erwähnten Kupferdrähte D , G und S führten durch einen dicht schliessenden Korkpfropfen nach aussen.

Die electromotorischen Kräfte der Thermoelemente wurden in folgender Weise gemessen. Auf einem Tische war ein 1 mm dicker und über 5 m langer Kupferdraht so befestigt, dass das erste halbe Meter des Drahtes über einen in Millimeter eingetheilten Maassstab ausgespannt war, während der übrige Theil des Drahtes bei jedem halben Meter, vom Nullpunkte des Maassstabes an gerechnet, an dem

Tisch festgemacht war und hier einen kleinen Bügel bildete. Dieser Draht war mit einem Daniell'schen Element, einem Siemens'schen Rheostaten und einer Sinusbussole zu einer Kette verbunden.

Von dem Drahte *G* des Erwärmungsapparates führte eine Leitung nach einem genügend astatisch gemachten Wiedemann'schen Spiegelgalvanometer und von da ab zu dem Nullpunkt des oben beschriebenen Messdrahtes. Von den beiden anderen Drähten *D* und *S* führten zwei Leitungen zu dem am Messtische sitzenden Beobachter. Wenn eine dieser Leitungen mit einem Punkte des Messdrahtes in Berührung gebracht wird, so geht sowohl der thermoelectrische als der vom Messdrahte abgeleitete Strom durch das Galvanometer, und wenn diese beiden in dem Stromkreise erregten electromotorischen Kräfte gleich gross und entgegengesetzt sind, so wird der Galvanometerspiegel keinen Ausschlag geben. In dieser Weise waren alle Galvanometerbeobachtungen auf Nullpunktsbeobachtungen zurückgeführt, und man hat in den abgelesenen Millimetern des Messdrahtes ein Maass der electromotorischen Kräfte Δ und Σ ; und zwar wird Δ mittelst der von *D* kommenden Leitung auf dem über den Maassstab ausgespannten Theil des Messdrahtes gemessen, während Σ mittelst der Leitung von *S* auf dem übrigen, nur in halbe Meter eingetheilten Theil des Messdrahtes gemessen wird.

Alle Drahtleitungen, der Galvanometerdraht und der Messdraht mit einbegriffen, bestanden aus einem 1 mm dicken Kupferdraht von einer und derselben Drahtrolle, und überall, wo zwei Drahtenden durch Klemmschrauben verbunden waren, waren die Drähte selbst in unmittelbare Berührung miteinander gebracht. Die Drahtenden, welche an dem Messtische bewegt werden sollten, waren auf hölzernen Handhaben befestigt. Die Messungen wurden bei Lampenlicht, gegen welches das Galvanometer durch einen Schirm geschützt war, ausgeführt, das Tageslicht war nur sparsam und Sonnenschein gar nicht ins Beobachtungszimmer eingelassen. Das Daniell'sche Element wurde immer eine Stunde, bevor die Messungen anfangen, in die Stromkreise

eingeschaltet, wodurch ein sehr constanter Strom während der Messungen erhalten wurde. Endlich waren auch die electricen Widerstände der verschiedenen Theile des Messdrahtes genau verglichen.

Durch obige Vorsichtsmaassregeln gelang es, alle thermoelectricen Wirkungen von den äusseren Leitungen fernzuhalten. Wenn die in dem Erwärmungsapparat angebrachte Stange nach gehöriger Zeit die Temperatur des Apparats angenommen hatte, wurden auch bei den bei gewöhnlicher Temperatur angestellten Versuchen sowohl Δ als Σ gewöhnlich gleich 0 gefunden. War dagegen der Apparat durch Wasserdampf erwärmt, so war dieses nicht mehr der Fall, und Δ und Σ mussten alsdann von den Punkten des Maassstabes gerechnet werden, welche die Messungen bei dem stationären Temperaturzustande ergeben hatten. Diese constanten thermoelectricen Kräfte rührten zum Theil von der einseitigen Erwärmung der drei in den Erwärmungsapparat führenden dicken Kupferdrähte her, in welchen wegen der Erwärmung beim Löthen ein merkbarer thermoelectricer Unterschied an den beiden Enden entstanden war.

Bei dem Beginn eines Versuchs ist das Rohr des Erwärmungsapparats an c mit einem Korkpfropfen verschlossen, bis die Stange die constante Temperatur des Apparats erreicht hat. Alsdann wird der Pfropfen entfernt und eine im Voraus erwärmte Stange, in der Regel die Kupferstange, wird von aussen an c geführt, und die Erwärmung der äusseren Stange wird noch während des Versuches mittelst einer kleinen Lampe um ein wenig gesteigert. Diese Erwärmung muss so geleitet werden, dass die thermoelectriche Differenz Δ schnell steigt und sich dann in einiger Zeit einigermaßen constant hält. Um mit Sicherheit die Erwärmung leiten zu können, muss für eine vollständige metallische Berührung der beiden Stangen gesorgt werden, weshalb die Endfläche der äusseren Stange immer frisch amalgamirt war. Im übrigen kann ich keine allgemeine Regel für die Erwärmung geben, sie erfordert nur einige Uebung zum Gelingen des Versuches. Mehrere rationelle Erwärmungsmethoden habe ich zwar versucht, aber

sie wieder verwerfen müssen. Die schlecht leitenden Stangen von Antimon und Wismuth habe ich, um die richtige Erwärmung zu erlangen, um etwas kürzer machen müssen.

Sobald die Messungen ergeben, dass Δ sich der Constantz nähert, sucht man Σ zu bestimmen, das heisst, man bringt die Spitze des von S kommenden Drahtes in tastende Berührung mit einem der am Messdraht angebrachten kleinen Bügel, die in 500, 1000, bis 5000 mm Entfernung von dem Nullpunkte angebracht sind, und beobachtet alsdann mittelst einer Pendeluhr den Zeitmoment, wo die Berührung eines dieser Bügel keinen Strom erzeugt. Dann wird Δ genau bestimmt, und wiederum wird der Zeitmoment, wenn Σ die nächste Theilung passirt, beobachtet und so fort weiter, bis entweder Δ sich nicht mehr genügend constant erhält, oder bis der höchste Punkt, 5000 mm, des Maassstabes erreicht ist. Die Erwärmung wird alsdann unterbrochen, das Rohr des Erwärmungsapparates wird wieder mit dem Korkpfropfen verschlossen, und Δ nimmt jetzt rasch ab und nähert sich dem Nullpunkte. Die Beobachtungen werden alsdann bei abnehmender Σ wie früher fortgesetzt, bis man zu der zuerst notirten niederen Grenze für Σ zurückgekommen ist. Die Berechnung einer solchen Versuchsreihe wird dann mittelst der Gleichungen (7) und (8) ausgeführt.

Um mich über die Richtigkeit der gewonnenen Resultate zu vergewissern und die möglichen Fehlerquellen zu entdecken, habe ich, bevor ich meine endlichen Messungen anfang, eine grosse Menge, in verschiedenen Weisen variirter Versuche (über 100 Beobachtungsreihen) angestellt. Es wurden Versuche theils mit dem oben beschriebenen Erwärmungsapparat, der bei den endlichen Messungen angewendet wurde, theils mit einem anderen, theils auch in freier Luft ausgeführt. In einigen Versuchen war die Stange mit Baumwolle oder Eiderdaunen umgeben. Ferner wurden Versuche bei sehr verschiedenen Erwärmungsgraden angestellt, indem der in den Stromkreis des Messdrahtes eingeschaltete Widerstand von 300 bis 50 Siemens-Einheiten variirte. Ausser den gewöhnlich benutzten Thermoelementen von Kupfer- und Neusilberdraht wurden auch Elemente von

K
K
gr
so
ge
we
ich
Be
bei
dra
in
wer
unt
lich
erh

suc
Fol
En
und
keit

Star
100
best
Wid
Stan
gebr
wür
Auch
Zimm
geben
ganz
Was
Drah

1)
Ann.

Kupfer- und Eisendraht geprüft. Da die electromotorische Kraft der ersteren Elemente mit wachsender Temperatur grösser, bei den letzteren Elementen dagegen kleiner wird, sodass die Temperaturangaben dieser Elemente zu entgegengesetzten Seiten von der gewöhnlichen Temperaturscala abweichen, sind diese Versuche nicht ohne Interesse, weshalb ich im Folgenden eine mit Kupfer-Eisendraht ausgeführte Beobachtungsreihe mittheilen werde. Endlich habe ich auch bei den Eisen-, Neusilber- und Wismuthstangen Kupferdrähte allein, die in leitender Verbindung mit der Stange in die Löcher eingesetzt wurden, als Thermoelemente angewendet. Ich beschränke mich in Bezug auf alle diese Voruntersuchungen darauf, anzugeben, dass durchaus keine erheblichen Differenzen in den bei den verschiedenen Messungen erhaltenen Resultaten wahrgenommen wurden.

Nach Beendigung dieser sehr zeitraubenden Voruntersuchungen konnten die endlichen Messungen, die ich im Folgenden vollständig mittheilen werde, ziemlich schnell zu Ende geführt werden, da in der That die Versuche an und für sich nach einiger Uebung keine besonderen Schwierigkeiten darbieten.

Das electriche Leitungsvermögen habe ich für alle Stangen unmittelbar in absolutem Maasse bei 0° und bei 100° durch die in diesen Annalen¹⁾ beschriebene Methode bestimmt, durch welche Methode die Messungen kleiner Widerstände sich leicht und genau ausführen lassen. Die Stangen waren theils in Eis, theils in siedendes Wasser gebracht. Nur die Magnesiumstange und die Aluminiumstange wurden allein in dem Erwärmungsapparat auf 100° erwärmt. Auch wurden einige Beobachtungen bei der Temperatur des Zimmers gemacht, wobei die Stange allein von der Luft umgeben war. Bei gegebener Temperatur waren die Resultate ganz die nämlichen, mochte die Stange von Luft oder von Wasser umgeben sein.

Bei diesen Versuchen habe ich allein von der äusseren Drahtrolle meines Apparates Gebrauch gemacht, mit welcher

1) Lorenz, Pogg. Ann. 149. p. 251. 1873.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XIII.

Rolle ich auch einige Bestimmungen des Leitungsvermögens des Quecksilbers angestellt habe. Die Resultate stimmten mit den von mir früher gefundenen überein, indem ich wiederum einen um 2 Proc. kleineren Werth als das Committee der British Association für den absoluten Widerstand des Quecksilbers gefunden habe. Ein dazwischen liegender Werth ist von Hrn. Rowland¹⁾ gefunden, allein es muss dabei bemerkt werden, dass dieser und andere Beobachter nicht den Widerstand des Quecksilbers unmittelbar bestimmt haben, sondern allein den Widerstand der Siemens'schen Copien, welche durch Vergleichung mit verhältnissmässig dünnen Quecksilbersäulen erhalten sind.

Ich benutze diese Gelegenheit zu einem kleinen Zusatz zu meiner oben citirten Abhandlung, wo ich (p. 262) einfach eine eigenthümliche Inductionswirkung auf die Galvanometernadel ohne Erklärung notirt habe. Diese Induction rührt von der Wirkung der Drahtrolle auf den nächstliegenden Theil der zum Galvanometer führenden Leitung her. Wenn diese Leitung zu der Drahtrolle senkrecht auf deren Windungen geführt wird, so hört die besagte Wirkung auf.

Die Bestimmungen der specifischen Gewichte wurden bei gewöhnlicher Temperatur ausgeführt, und indem ich die Ausdehnungscoefficienten als bekannt voraussetzte sind danach die specifischen Gewichte bei 0° und 100° berechnet. Diese Versuche sowie die nächstfolgenden wurden mit 6 cm langen, von den Stangen abgeschnittenen Stücken ausgeführt.

Endlich habe ich auch alle Wärmecapacitäten bei drei verschiedenen Temperaturen bestimmt. Der für diese Versuche eingerichtete Erwärmungsapparat bestand aus einem 156 mm hohen, 55 mm im Durchmesser haltenden Cylinder aus Kupfer, in dessen Deckel ein unten verschlossenes, 128 mm langes, 27 mm weites Rohr befestigt war. Der Cylinder enthielt Aethylalkohol oder Amylalkohol, der in stetigem Sieden gehalten wurde, indem die Dämpfe in einem spiralförmigen Glasrohre verdichtet wurden, und die

1) Rowland, Sill. Journ. 15. p. 281. 1878.

Flüssigkeit zum Cylinder zurückkehrte. Das zu untersuchende Stück einer der Stangen wurde in das innere Rohr eingebracht und in dieser Weise auf nahezu 78 oder 131° erwärmt. Endlich wurde auch in demselben Apparate, durch Einsetzung desselben in eine Kältemischung von Eis und Kochsalz, die kleine Stange bis auf die Temperatur desselben abgekühlt. Wenn eine constante Temperatur erreicht war, wurde der Erwärmungsapparat mittelst einer Handhabe zu dem Calorimeter geführt, in welches die kleine Stange schnell gestürzt wurde. Im übrigen wurde in gewöhnlicher Weise verfahren. Da die Temperatur des Zimmers bei diesen Messungen nahezu 20° betrug, waren die den gefundenen Wärmecapacitäten entsprechenden mittleren Temperaturen sehr nahe 0°, 50°, 75°. Bei jeder dieser drei Temperaturen wurden wenigstens zwei Beobachtungen gemacht. Die gefundenen mittleren Werthe werden in dem Folgenden mitgetheilt.

Aus diesen Beobachtungen habe ich die Wärmecapacitäten c_0 und c_{100} bei 0 und 100° durch die Formeln:

$$c_0 = c + 0,45 \varepsilon - 0,30 \varepsilon' \quad c_{100} = c + 0,20 \varepsilon + 1,20 \varepsilon'$$

berechnet, indem durch c , $c + \varepsilon$, $c + \varepsilon'$ die mittleren Werthe der den Temperaturen 0°, 50°, 75° entsprechenden beobachteten Wärmecapacitäten bezeichnet werden. Die obigen Formeln sind mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, wobei die Gewichte der gefundenen Werthe von c , $c + \varepsilon$ und $c + \varepsilon'$ bezüglich gleich 1, 2 und 3, 4 geschätzt wurden.

In den folgenden Tabellen habe ich die Resultate der ausgeführten Messungen in der Reihenfolge zusammengestellt, in welcher die Beobachtungen über die Wärmeleitung angestellt wurden. ϑ ist die Temperatur des Erwärmungsapparates, die in erster Linie angegebenen Werthe von Δ und Σ sind die auf den Messdraht in Millimetern gemessenen constanten Temperaturen beim Anfange des Versuches, W ist der Widerstand im Stromkreise des Messdrahtes. Dieser Widerstand betrug gewöhnlich 102 S.-E., wobei 1° C. 48 mm des Messdrahtes bei 0° und 58,5 mm bei 100° entspricht. Die erste verticale Reihe der Tabelle

enthält die mittleren Werthe $\frac{1}{2}(\Sigma_{m-1} + \Sigma_m)$ von zwei nacheinander folgenden beobachteten Werthen von Σ , die zweite Reihe enthält die zwischen diesen beiden Beobachtungen verflossene Anzahl Secunden (t), durch welche die in der dritten Reihe angegebenen Werthe von $d\Sigma/dt$ mittelst der Gleichung (8) berechnet sind, welche Gleichung bis auf eine kleine Correction $d\Sigma/dt = 500/t$ gibt. Die vierte Verticalreihe enthält die beobachteten Werthe von Δ . Die drei folgenden Reihen enthalten die entsprechenden, bei der nachfolgenden Erkältung gefundenen Grössen, wobei Σ dieselben Werthe rückwärts durchläuft. Endlich enthält die achte Verticalreihe die mittelst der Gleichung (7) berechneten Werthe von al^2 , wo $l = 2$, während in der letzten Reihe die Werthe von $10^5 b/a$ mittelst der Gleichung:

$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{d\Sigma'}{dt}}{\Sigma} + \frac{\Delta'}{4a\Sigma}$$

berechnet sind. Es mag bemerkt werden, dass hier Δ und Σ von den beim Anfange der Beobachtungen bestimmten festen Punkten gerechnet werden müssen, während die Werthe von a von diesen Punkten unabhängig sind. Als absolute Einheiten sind hier überall das Gramm als Masseneinheit, das Centimeter als Längeneinheit und die Secunde als Zeiteinheit angenommen worden.

Zinn.

1. $\vartheta = 6,0^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1250	153	3,27	45	513	0,99	0	10,56	79
1750	187	2,67	44	376	1,34	1	10,72	82
2250	247	2,05	43	308	1,64	5	10,30	94

2. $\vartheta = 6,4^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S.-E.

3250	109	4,59	82	178	2,82	5	10,39	102
3750	116	4,31	85	155	3,23	5	10,61	99
4250	114	4,40	90	141	3,55	9	10,19	105

3. $\vartheta = 8,2^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -30$, $W = 102$ S.-E.

2250	98	5,10	73	265	1,90	-2	10,71	76
2750	105	4,76	72	213	2,36	-8	10,53	76
3250	114	4,39	70	183	2,74	-8	10,24	75
3750	130	3,85	71	153	3,27	-3	10,39	79
4250	130	3,85	74	147	3,41	0	10,19	80

4. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = 22$, $\Sigma = 700$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2250	120	4,17	88	320	1,57	22	11,54	101
2750	135	3,71	90	258	1,95	23	11,84	100
3250	160	3,13	90	214	2,34	25	11,88	102
3750	216	2,32	87	198	2,53	30	11,75	106

5. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -27$, $\Sigma = 1500$, $W = 102$ S.-E.

3750	61	8,20	93	218	2,31	-27	11,42	103
4250	68	7,35	97	170	2,95	-27	12,02	108
4750	70	7,14	96	170	2,95	-22	11,70	104

Die drei Beobachtungsreihen 1, 2 und 4 sind mit thermoelectrischen Elementen von Kupfer-Eisendraht ausgeführt, während bei den anderen sowohl als bei allen folgenden Beobachtungen Elemente von Neusilber-Kupferdraht angewendet sind. Als Mittel aus den Reihen 1, 2 und 3 ergibt sich:

$$4a = 10,44 \text{ bei } 16^\circ \text{ C.},$$

und aus den Reihen 4 und 5:

$$4a = 11,74 \text{ bei } 106^\circ \text{ C.}$$

Die hieraus berechneten, den Temperaturen 0 und 100° entsprechenden Werthe von $4a$ sind:

$$4a_0 = 10,21, \quad 4a_{100} = 11,64.$$

Die beobachteten Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,05368, bei 50° 0,05534, bei 75° 0,05643, woraus mittelst der Gleichungen (9):

$$c_0 = 0,05360, \quad c_{100} = 0,05731$$

erhalten wird.

Die 0 und 100° entsprechenden Dichtigkeiten sind:

$$\delta_0 = 7,276, \quad \delta_{100} = 7,226,$$

woraus: $c_0 \delta_0 = 0,3900, \quad c_{100} \delta_{100} = 0,4141.$

Die Wärmeleitungsvermögen bei 0 und 100° sind demnach:

$$k_0 = \frac{c_0 \delta_0}{a_0} = 0,1528, \quad k_{100} = \frac{c_{100} \delta_{100}}{a_{100}} = 0,1423, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1,074.$$

Die bei 0 und 100° beobachteten electrischen Leitungsvermögen sind:

$$x_0 = 9,346 \cdot 10^{-5}, \quad x_{100} = 6,524 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{x_0}{x_{100}} = 1,433,$$

woraus:

$$\frac{k_0}{x_0} = 1635, \quad \frac{k_{100}}{x_{100}} = 2181, \quad \frac{k_{100}}{x_{100}} : \frac{k_0}{x_0} = 1,334.$$

Eisen.

1. $\vartheta = 9,8^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 114$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^3$
2250	86	5,81	141	553	0,91	2	20,62	40
2750	84	5,95	144	440	1,14	2	20,03	41
3250	90	5,56	144	366	1,37	2	20,50	42
3750	90	5,56	146	308	1,62	2	20,06	43
4250	94	5,32	149	268	1,87	4	20,17	46
4750	99	5,05	151	240	2,08	8	20,06	50

2. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -13$, $\Sigma = 300$, $W = 62$ S.-E.

2750	180	2,78	77	510	0,98	-8	22,60	49
3250	202	2,48	79	393	1,27	-6	22,67	54
3750	238	2,10	79	347	1,44	-2	22,88	56
4250	290	1,72	79	308	1,62	+3	22,35	59

Mittel aus 1: $4a = 20,24$ bei 19° .Mittel aus 2: $4a = 22,73$ bei 114° .Hieraus: $4a_0 = 19,74$, $4a_{100} = 22,34$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,1050, bei 50° 0,1107, bei 75° 0,1136,woraus: $c_0 = 0,1050$, $c_{100} = 0,1165$.

Ferner sind:

 $\delta_0 = 7,828$, $\delta_{100} = 7,799$, $c_0 \delta_0 = 0,8219$, $c_{100} \delta_{100} = 0,9086$, $k_0 = 0,1665$, $k_{100} = 0,1627$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 1,023$, $x_0 = 10,374 \cdot 10^{-5}$, $x_{100} = 6,628 \cdot 10^{-5}$, $\frac{x_0}{x_{100}} = 1,565$, $\frac{k_0}{x_0} = 1605$, $\frac{k_{100}}{x_{100}} = 2455$, $\frac{k_{100}}{x_{100}} : \frac{k_0}{x_0} = 1,530$.

Neusilber.

1. $\vartheta = 9,6^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 240$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^3$
2750	157	3,18	194	425	1,18	4	43,58	51
3250	167	2,99	193	375	1,33	6	43,29	49
3750	176	2,84	192	340	1,47	8	42,69	47
4250	202	2,48	191	320	1,56	20	42,33	51

2. $\vartheta = 10,3^\circ$, $A = 5$, $\Sigma = 100$, $W = 102$ S.-E.

2750	146	1,42	207	442	1,13	13	42,64	50
3250	140	3,57	222	396	1,26	18	42,24	50
3750	159	3,14	221	380	1,32	30	42,83	50

3. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -29$, $\Sigma = 350$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^3$
3750	73	6,85	269	392	1,28	-15	34,93	49
4250	73	6,85	281	345	1,45	-13	35,42	49
4750	74	6,76	288	275	1,82	-11	34,85	53

4. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -21$, $\Sigma = 1100$, $W = 102$ S.-E.

3750	276	1,81	94	432	1,16	-13	36,03	52
4250	298	1,68	96	400	1,25	-7	35,15	52
4750	362	1,38	100	386	1,30	+3	36,19	53

Mittel aus 1 und 2: $4a = 42,80$ bei 19° .Mittel aus 3 und 4: $4a = 35,43$ bei 108° .Hieraus: $4a_0 = 44,37$, $4a_{100} = 36,09$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,09153, bei 50° 0,09292, bei 75° 0,09401,
woraus: $c_0 = 0,09141$, $c_{100} = 0,09467$.

Ferner sind:

 $\delta_0 = 8,499$, $\delta_{100} = 8,457$, $c_0 \delta_0 = 0,7769$, $c_{100} \delta_{100} = 0,8006$, $k_0 = 0,07004$, $k_{100} = 0,08874$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 0,7893$, $\alpha_0 = 3,766 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{100} = 3,632 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,037$, $\frac{k_0}{\alpha_0} = 1858$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2443$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,314$.

Kupfer.

1. $\vartheta = 11,2^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 50$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^3$
1250	186	2,69	15	985	0,52	1	4,36	64
1750	162	3,09	18	680	0,74	2	4,18	72
2250	156	3,21	22	512	0,98	3	4,54	75
2750	154	3,25	24	406	1,24	4	4,45	79
3250	150	3,34	27	334	1,50	5	4,55	81
3750	158	3,21	29	288	1,74	6,5	4,55	86
4250	153	3,27	32	246	2,04	8,5	4,43	94
4750	150	3,34	35	224	2,23	10,5	4,40	98

2. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = 3$, $\Sigma = 150$, $W = 52$ S.-E.

3250	99	5,05	39	287	1,75	7,5	4,63	88
3750	101	4,95	40	250	2,01	8	4,60	86
4250	107	4,68	41	220	2,28	9	4,60	87

Mittel aus 1: $4a = 4,43$ bei 19° .Mittel aus 2: $4a = 4,61$ bei 117° .

Hieraus: $4a_0 = 4,40$, $4a_{100} = 4,58$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,08988, bei 50° 0,09169, bei 75° 0,09319,
woraus: $c_0 = 0,08970$, $c_{100} = 0,09421$.

Ferner:

$\delta_0 = 8,827$, $\delta_{100} = 8,783$, $c_0 \delta_0 = 0,7918$, $c_{100} \delta_{100} = 0,8274$,

$k_0 = 0,7198$, $k_{100} = 0,7226$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 0,996$,

$\alpha_0 = 45,74 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{100} = 33,82 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,352$,

$\frac{k_0}{\alpha_0} = 1574$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2137$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,358$.

Blei.

1. $\vartheta = 11,0^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = -50$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1750	84	5,95	136	273	1,84	4	16,94	115
2250	86	5,81	140	211	2,38	5	16,48	116
2750	99	5,05	145	175	2,86	8	17,30	118

2. $\vartheta = 12,1^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S.-E.

2250	142	3,53	105	210	2,39	5,5	16,81	121
2750	149	3,36	114	174	2,88	8	16,99	122
3250	162	3,09	120	146	3,43	11	16,71	126
3750	183	2,74	129	126	3,97	17	16,68	133

3. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -35$, $\Sigma = 500$, $W = 102$ S.-E.

1750	111	4,51	78	380	1,33	-30	18,49	129
2250	132	3,79	79	263	1,91	-24	18,05	145

4. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -35$, $\Sigma = 630$, $W = 102$ S.-E.

3250	233	2,16	76	112	4,47	-42	17,80	156
3750	273	1,84	84	94	5,32	-44	17,88	155

Mittel aus 1 und 2: $4a = 16,84$ bei 19° .

Mittel aus 3 und 4: $4a = 18,05$ bei 105° .

Hieraus: $4a_0 = 16,57$, $4a_{100} = 17,98$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,03067, bei 50° 0,03092, bei 75° 0,03071,
woraus: $c_0 = c_{100} = 0,03077$.

Ferner:

$\delta_0 = 11,257$, $\delta_{100} = 11,163$, $c_0 \delta_0 = 0,3464$, $c_{100} \delta_{100} = 0,3435$.

$$\begin{aligned}
 k_0 &= 0,08362, & k_{100} &= 0,07642, & \frac{k_0}{k_{100}} &= 1,094, \\
 \alpha_0 &= 5,141 \cdot 10^{-5}, & \alpha_{100} &= 3,602 \cdot 10^{-5}, & \frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} &= 1,427, \\
 \frac{k_0}{\alpha_0} &= 1627, & \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} &= 2122, & \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} &= 1,304.
 \end{aligned}$$

Messing (rothes).

$$1. \vartheta = 12,7^\circ, \quad A = 0, \quad \Sigma = -42, \quad W = 102 \text{ S.-E.}$$

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2250	110	4,55	70	558	0,90	3	12,29	50
2750	111	4,50	73	406	1,24	4	12,02	56
3250	108	4,63	77	348	1,44	5	11,86	56
3750	114	4,39	80	284	1,76	6	12,03	59

$$2. \vartheta = 100^\circ, \quad A = -14,5, \quad \Sigma = -273, \quad W = 102 \text{ S.-E.}$$

1750	90	5,56	65	460	1,10	-12	11,56	65
2250	86	5,81	68	318	1,58	-14	11,10	64
2750	83	6,02	72	194	2,58	-21	10,81	65
3250	80	6,25	77	131	3,82	-30	10,63	67

In der letzteren Beobachtungsreihe ist die Erkältung der Stange durch eine kurzdauernde Berührung mit einer kalten Stange beschleunigt.

Mittel aus 1: $4a = 12,05$ bei 21° .

Mittel aus 2: $4a = 11,02$ bei 107° .

Hieraus: $4a_0 = 12,29, \quad 4a_{100} = 11,10.$

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,08991, bei 50° 0,09224, bei 75° 0,09396,

woraus: $c_0 = 0,09005, \quad c_{100} = 0,09396.$

Ferner:

$\delta_0 = 8,395, \quad \delta_{100} = 8,348,$

$c_0 \delta_0 = 0,7559, \quad c_{100} \delta_{100} = 0,7844,$

$k_0 = 0,2460, \quad k_{100} = 0,2827, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 0,8704,$

$\alpha_0 = 15,75 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_{100} = 13,31 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,183,$

$\frac{k_0}{\alpha_0} = 1562, \quad \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2123, \quad \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,360.$

Messing (gelbes).

1. $\vartheta = 12,0^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 173$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3250	65	7,69	143	324	1,56	11	14,27	76
3750	66	7,58	147	264	1,90	16	13,82	86
4250	67	7,46	150	204	2,46	18	13,31	93
2. $\vartheta = 10,3^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 120$, $W = 102$ S.-E.								
2250	304	1,66	44	505	1,00	8	13,53	75
3. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -6$, $\Sigma = 550$, $W = 102$ S.-E.								
2750	170	2,94	47	367	1,37	-5	12,05	66
3250	192	2,61	48	307	1,63	-3	12,03	69
3750	226	2,22	48	266	1,88	0	11,71	74
4250	275	1,82	48	255	1,96	4	11,64	76

Mittel aus 1 und 2: $4a = 13,73$ bei 20° .Mittel aus 3: $4a = 11,86$ bei 107° .Hieraus: $4a_0 = 14,16$, $4a_{100} = 12,01$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,08833, bei 50° 0,09218, bei 75° 0,09265,woraus: $c_0 = 0,08876$, $c_{100} = 0,09428$.

Ferner:

 $\delta_0 = 8,140$, $\delta_{100} = 8,090$, $c_0 \delta_0 = 0,7225$, $c_{100} \delta_{100} = 0,7627$, $k_0 = 0,2041$, $k_{100} = 0,2540$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 0,8035$, $\alpha_0 = 12,625 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{100} = 11,00 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,148$, $\frac{k_0}{\alpha_0} = 1617$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2309$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,428$,

Magnesium.

1. $\vartheta = 10,9^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 210$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3750	63	7,94	56	153	3,27	2	4,82	104
4250	66	7,58	59	132	3,79	3	4,93	109
4750	63	7,94	61	115	4,35	4	4,64	115
2. $\vartheta = 10,8^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 50$, $W = 102$ S.-E.								
1250	121	4,13	23,5	514	0,99	0	4,59	82
1750	118	4,24	24,5	368	1,37	0	4,37	81
2250	124	4,03	26,5	268	1,88	0,5	4,40	90
2750	132	3,79	28	226	2,22	1	4,51	90
3250	137	3,65	30	190	2,64	2	4,45	97
3750	150	3,34	32	152	3,30	2	4,52	101

3. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -20$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2750	184	2,72	28,5	173	2,89	1,5	4,81	114
3250	204	2,45	30	145	3,45	2,5	4,66	121
3750	235	2,13	31,5	124	4,03	3	4,63	123
4250	273	1,83	30,5	122	4,10	4,5	4,38	119

4. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -2$, $\Sigma = 0$, $W = 52$ S.-E.

3250	81	6,17	44	148	3,38	-2	4,82	104
3750	96	5,21	40,5	125	4,00	-2	4,61	107
4250	129	3,88	38	119	4,20	-1,5	4,89	101
4750	166	3,01	35,5	105	4,76	+1,5	4,38	117

Die letztere Beobachtungsreihe ist nicht bei Erwärmung, sondern mittelst Erköltung ausgeführt, indem die äussere Stange nur bis auf 80° erwärmt war und während des Versuches frei in der Luft erkaltete. Der Strom im Messdrahte war deshalb hier umgekehrt.

Mittel aus allen Beobachtungen: $4a = 4,612$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,2456, bei 50° 0,2519, bei 75° 0,2509,

woraus: $c_0 = c_{100} = 0,2503$.

Ferner: $\delta_0 = 1,739$, $\delta_{100} = 1,725$, $c\delta = 0,4335$,

$k_0 = k_{100} = 0,3760$

$\alpha_0 = 24,47 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{100} = 17,50 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,398$,

$\frac{k_0}{\alpha_0} = 1537$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2149$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,398$.

Aluminium.

1. $\vartheta = 13,7^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3750	61	8,20	72	202	2,48	3,5	6,41	81
4250	63	7,94	73	181	2,76	3,5	6,31	85

2. $\vartheta = 14,0^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 120$ S.-E.

2750	85	5,88	52	303	1,63	2	6,64	71
3250	88	5,68	54	243	2,06	3	6,59	77
3750	94	5,32	55	212	2,36	4	6,64	79
4250	96	5,21	57	164	3,05	4,5	6,35	88
4750	97	5,15	58	180	2,78	7,5	6,37	83

3. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -15$, $\Sigma = 220$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^3$
3750	94	5,32	41	209	2,37	-11	6,76	84
4250	92	5,43	44	181	2,76	-10	6,59	87
4750	92	5,43	47	167	2,99	-9	6,65	86

4. $\vartheta = 100^\circ$, $\Delta = -5,5$, $\Sigma = 320$, $W = 52$ S.-E.

3250	221	2,27	23,5	216	2,32	-5,5	6,32	79
3750	290	1,73	23,5	191	2,62	-5	6,55	79
4250	388	1,30	23	177	2,83	-4	6,44	78

Mittel aus allen Beobachtungen: $4a = 6,517$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,2055, bei 50° 0,2088, bei 75° 0,2144,woraus: $c_0 = 0,2043$, $c_{100} = 0,2168$.

Ferner:

 $\delta_0 = 2,739$, $\delta_{100} = 2,720$, $c_0 \delta_0 = 0,5596$, $c_{100} \delta_{100} = 0,5897$, $k_0 = 0,3435$, $k_{100} = 0,3619$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 0,9489$, $\alpha_0 = 22,46 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{100} = 17,31 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,297$, $\frac{k_0}{\alpha_0} = 1529$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2091$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,367$.

Cadmium.

1. $\vartheta = 13,3^\circ$, $\Delta = -1$, $\Sigma = -70$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	Δ	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	Δ'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^3$
1250	67	7,46	71	566	0,90	-1	8,61	68
1750	71	7,04	74	396	1,27	-1	9,03	70
2250	71	7,04	76	303	1,66	-1	8,85	72
2750	72	6,94	78	245	2,05	-1	8,79	73
3250	74	6,76	81	200	2,50	-1	8,86	75
3750	74	6,76	85	178	2,81	0	8,88	77
4250	75	6,67	88	156	3,21	1	8,81	80

2. $\vartheta = 14,7^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 52$ S.-E.

1750	68	7,35	78	385	1,30	0	9,02	74
2250	74	6,76	78	286	1,75	0	9,16	78
2750	81	6,17	75	228	2,19	0	8,97	80
3250	98	5,10	71	197	2,54	2	9,03	85
3750	123	4,07	67	181	2,76	5	9,08	88

3. $\vartheta = 14,8^\circ$, $\Delta = 0$, $\Sigma = -40$, $W = 102$ S.-E.

1250	88	5,68	58	548	0,93	0	8,77	72
1750	95	5,26	59	378	1,33	0	8,98	74
2250	114	4,39	56	287	1,75	0,5	9,04	78
2750	140	3,57	52	235	2,13	1	8,95	80

4. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -33,5$, $\Sigma = 1100$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3250	67	7,46	55	290	1,73	-33,5	9,63	80
3750	60	8,33	62	236	2,12	-33,5	9,14	80
4250	65	7,69	64	196	2,55	-33,5	9,52	81
4750	67	7,46	69	153	3,27	-33,5	9,55	90

5. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -17$, $\Sigma = 550$, $W = 52$ S.-E.

3250	133	3,76	39,5	215	2,33	-17	9,28	86
3750	149	3,36	42,5	185	2,70	-15,5	9,57	89
4250	187	2,67	43	163	3,07	-13	9,76	94

Mittel aus 1, 2 und 3: $4a = 8,927$ bei 24° .Mittel aus 4 und 5: $4a = 9,493$ bei 110° .Hieraus: $4a_0 = 8,769$, $4a_{100} = 9,427$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,05562, bei 50° 0,05643, bei 75° 0,05607,

woraus:

$$c_0 = 0,05585, \quad c_{100} = 0,05632.$$

Ferner:

$$\delta_0 = 8,638, \quad \delta_{100} = 8,556, \quad c_0 \delta_0 = 0,4824, \quad c_{100} \delta_{100} = 0,4819,$$

$$k_0 = 0,2200, \quad k_{100} = 0,2045, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1,076,$$

$$\alpha_0 = 14,41 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_{100} = 10,18 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,415,$$

$$\frac{k_0}{\alpha_0} = 1527, \quad \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2009, \quad \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,315.$$

Antimon.

1. $\vartheta = 16,5^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = -60$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
1750	138	3,63	174	274	1,84	0	31,81	102
2250	162	3,09	179	195	2,57	0	31,63	111
2750	192	2,61	181	165	3,04	2	31,68	112

2. $\vartheta = 15,1^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 180$, $W = 102$ S.-E.

2750	89	5,62	278	156	3,21	0	31,47	125
3250	93	5,38	294	138	3,63	5	32,07	123
3750	100	5,00	304	115	4,35	8	31,64	129
4250	112	4,47	308	107	4,68	16	31,93	127

3. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -2$, $\Sigma = 800$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
3250	133	3,77	257	121	4,14	-15	34,38	154
3750	141	3,56	276	107	4,68	-11	34,84	150
4250	168	2,99	291	90	5,56	-6	34,73	160
4750	197	2,55	301	87	5,75	+12	34,78	158

Mittel aus 1 und 2: $4a = 31,75$ bei 24° .Mittel aus 3: $4a = 34,68$ bei 108° .Hieraus: $4a_0 = 30,91$, $4a_{100} = 34,40$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,05162, bei 50° 0,05174, bei 75° 0,05070,

woraus:

$$c_0 = c_{100} = 0,05120.$$

Ferner:

$$\delta_0 = 6,673, \quad \delta_{100} = 6,653, \quad c_0 \delta_0 = 0,3417, \quad c_{100} \delta_{100} = 0,3406,$$

$$k_0 = 0,04421, \quad k_{100} = 0,03961, \quad \frac{k_0}{k_{100}} = 1,116,$$

$$\alpha_0 = 2,199 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_{100} = 1,522 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,445,$$

$$\frac{k_0}{\alpha_0} = 2011, \quad \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2603, \quad \frac{k_{100}}{\alpha_{100}} : \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,294.$$

Wismuth.

1. $\vartheta = 16,1^\circ$, $A = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S.-E.

Σ	t	$\frac{d\Sigma}{dt}$	A	t	$-\frac{d\Sigma'}{dt}$	A'	$4a$	$\frac{b}{a} \cdot 10^5$
2300	96	5,22	577	180	2,79	14	70,3	130
2800	112	4,47	583	150	3,34	28	71,1	133

2. $\vartheta = 15,8$, $A = 0$, $\Sigma = 0$, $W = 102$ S.-E.

2400	105	4,77	551	178	2,82	12	71,9	125
2900	133	3,77	547	134	3,74	16	70,7	137
3400	181	2,78	528	109	4,60	0	71,5	135
3900	310	1,64	511	88	5,69	-10	71,1	142

3. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -4$, $\Sigma = 340$, $W = 102$ S.-E.

1900	159	3,16	440	169	2,98	-30	76,5	169
2400	196	2,57	453	126	3,98	-48	77,0	164

4. $\vartheta = 100^\circ$, $A = -4$, $\Sigma = 380$, $W = 102$ S.-E.

1900	176	2,85	408	223	2,26	21	75,7	170
2400	244	2,07	421	178	2,82	43	77,3	169
2900	424	1,22	422	152	3,30	70	77,9	166

Mittel aus 1 und 2: $4a = 70,95$ bei 25° .

Mittel aus 3 und 4: $4a = 76,88$ bei 105° .

Hieraus: $4a_0 = 69,10$, $4a_{100} = 76,51$.

Die Wärmecapacitäten sind:

bei 0° 0,03013, bei 50° 0,03066, bei 75° 0,03090,

woraus: $c_0 = 0,03014$, $c_{100} = 0,03116$.

Ferner:

$\delta_0 = 9,746$, $\delta_{100} = 9,707$, $c_0 \delta_0 = 0,2937$, $c_{100} \delta_{100} = 0,3025$,

$k_0 = 0,01700$ $k_{100} = 0,01581$, $\frac{k_0}{k_{100}} = 1,071$,

$\alpha_0 = 0,9293 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{100} = 0,6299 \cdot 10^{-5}$, $\frac{\alpha_0}{\alpha_{100}} = 1,475$,

$\frac{k_0}{\alpha_0} = 1830$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} = 2510$, $\frac{k_{100}}{\alpha_{100}} \cdot \frac{k_0}{\alpha_0} = 1,372$.

(Fortsetzung im nächsten Hefte.)

IV. Die specifische Wärme flüssiger organischer Verbindungen und ihre Beziehung zu deren Moleculargewicht; von M. A. von Reis.

(Habilitationsschrift.)

Die physikalischen Eigenschaften der chemischen Verbindungen nehmen mehr und mehr die Aufmerksamkeit der Forscher in Anspruch, es sind besonders die organischen Verbindungen, deren Untersuchung Thatfachen von grossem Werthe für die theoretische Chemie zu Tage gefördert haben.

Die Frage über die Constitution der organischen Verbindungen tritt immer mehr in den Vordergrund, man ist zur Einsicht gekommen, dass diese wichtige Frage nicht auf rein chemischem Wege gelöst werden kann. Hier stellt sich nun die Physik dem Forscher hilfreich zur Seite, und zeigen die in letzterer Zeit recht zahlreichen physikalisch-chemischen Arbeiten, dass man anfängt, diese Hülfe zu würdigen.

Betreffs die Wärmecapacität der Verbindungen hat Hermann Kopp die specifische Wärme fester anorganischer Verbindungen untersucht und gefunden, dass die Atomwärme derselben gleich der Summe der Atomwärme ihrer einzelnen Bestandtheile ist. Berthelot suchte die specifische Wärme flüssiger Verbindungen in bestimmte Beziehung zu ihrer Zusammensetzung zu bringen. Derselbe benutzte die von Kopp und Andrews für einige organische Flüssigkeiten angegebenen Zahlen, fand aber, da einerseits die Zahlen unsicher und widersprechend waren, und andererseits die specifische Wärme mit der Temperatur sich erheblich verändert, dass er zu keinem sicheren Resultate kommen konnte. Regnault suchte gleichfalls ähnliche Beziehungen ausfindig zu machen und berechnete die specifische Wärme bei 0° sowie bei dem Siedepunkt der betreffenden Flüssigkeit und verglich das Product der Moleculargewichte ähnlich zusammengesetzter Körper mit deren specifischer Wärme, wobei sich ergab, dass die specifische Wärme besser bei 0° als bei der Siedetemperatur übereinstimmte, obwohl diese Uebereinstimmung eine sehr mangelhafte war. Es ist aber wahrscheinlich, dass die specifische Wärme bei Flüssigkeiten ebenso wie bei festen Körpern in gewissen gesetzmässigen Beziehungen zu ihrer Zusammensetzung steht, obwohl bei der grossen inneren Arbeit der Flüssigkeiten diese Beziehungen schwerer ausfindig zu machen sind und vielleicht in Zusammenhang mit der Constitution der Verbindung stehen.

Ich entschloss mich, dieser Frage näher zu treten, und hatte hierzu besonders Veranlassung, da mir die Präparate des Hrn. Dr. Brühl, welche derselbe für seine schöne Arbeit über die Lichtbrechung organisch flüssiger Verbindungen benutzt hatte, zur Verfügung standen.

Die Resultate dieser meiner Untersuchung habe ich in den folgenden Blättern niedergelegt.

Da sich die specifische Wärme mit der Temperatur ganz erheblich verändert, so konnte ich nicht die Flüssigkeiten ohne weiteres miteinander vergleichen, sondern musste einen Punkt suchen, bei welchem der Zustand derselben ein

gleich
bei w
Flüss
I
Wärm
vergle
I
lässt,
schied
der F
unter
M
äusser

wo C
tempe
b bere
A
obach
Z
Kopp
gebrac
niedrig
meter,
für ho
Das C
von ein
strahlu
peratur
getauc
Tempe
zweites
Bad be
der Th
Zur A
mit ca
die Fl
Ann. d

gleicher war. Als solcher wurde der Siedepunkt gewählt, bei welchem man am sichersten voraussetzen kann, dass die Flüssigkeiten in einem ähnlichen Zustande sich befinden.

Es wird sich indess später zeigen, dass die specifische Wärme bei den Siedepunkten nur in ganz bestimmten Fällen vergleichbar waren.

Da diese specifische Wärme sich nicht direct beobachten lässt, musste dieselbe aus mehreren Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen berechnet werden, und wurde in der Regel bei vier verschiedenen Temperaturen, über und unter dem Siedepunkt, beobachtet.

Mittelst dreier von diesen Werthen, nämlich der beiden äusseren und eines der mittleren, wurde nach der Formel:

$$C_1 = K + a(T + T_1) + b(T^2 + TT_1 + T_1^2),$$

wo C_1 die specifische Wärme zwischen den Beobachtungstemperaturen T und T_1 bedeutet, die Constanten K , a und b berechnet.

Als specifische Wärme wurde das Mittel aus drei Beobachtungen angenommen.

Zur Bestimmung der specifischen Wärme wurde die Kopp'sche, von Wüllner modificirte Methode in Anwendung gebracht. Das hierzu erforderliche Calorimeter besitzt für niedrig siedende Substanzen, sammt Rührer und Thermometer, mit Wasser gefüllt, einen Wasserwerth von ca. 90 g., für hochsiedende Substanzen einen solchen von ca. 170 g. Das Calorimeter ist aus dünnem Messingblech verfertigt und von einem Wassermantel umgeben, um dasselbe gegen Wärmestrahlung zu schützen. Als Erhitzungsbad dient für Temperaturen bis zu 100° ein Quecksilberbad in ein Oelbad eingetaucht, welch letzteres in ein Wasserbad gesetzt ist. Für Temperaturen über 100° wurde ein Oelbad, in welches ein zweites taucht, in Anwendung gebracht. In dem inneren Bad befinden sich zwei Reagenzfläschchen, eins zur Aufnahme der Thermometerkugel und eins für das zu erwärmende Glas. Zur Aufnahme der Flüssigkeit diente ein kleines Fläschchen mit capillarem Hals. Dieses wurde nun so weit gefüllt, dass die Flüssigkeit noch Platz fand, sich auszudehnen, ohne in

den Hals zu steigen. Dieses Fläschchen erlaubte das Erhitzen der Flüssigkeit bis ca. 30° über den Siedepunkt, ohne dass der Stopfen aus Kork ausgetrieben wurde, oder irgend ein erheblicher Verlust durch Verdampfung stattfand. Es verflüchtigte sich jedoch immer ein wenig Flüssigkeit. Es wurde darum nach jeden drei Versuchen das Fläschchen gewogen und der Verlust auf die drei Beobachtungen gleichmässig vertheilt. In das Calorimeter wurde ein Thermometer, in $\frac{1}{50}$ Grade getheilt, in das Erwärmungsbad ein Thermometer von -14° bis $+108^{\circ}$, in $\frac{1}{10}$ Grade, und ein zweites von 100° bis 250° , in $\frac{1}{5}^{\circ}$ getheilt, eingesenkt.

Die drei Thermometer waren mit dem Luftthermometer verglichen.

Die wahrscheinlichen Fehlergrenzen bei Bestimmung der specifischen Wärme sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

	46°		119°		210°	
Beobachtet . . .	0,3927	—	0,2297	—	0,5722	—
Calorimeter 0,01°	0,3905	22	0,2288	9	0,5711	11
$\Sigma \Delta t$ 0,005° . . .	0,3916	11	0,2292	5	0,5717	5
Heizbad 0,1° . . .	0,3909	18	0,2296	1	0,5719	2
Wasserwerth des	0,3926	1	0,2296	1	0,5718	3
Calorimet. 0,1 g						
Wasserwerth des	0,3925	2	0,2295	2	0,5722	0
Fläschchens 0,1 g						
Summa :	—	54	—	18	—	21
		$\frac{1,37}{100}$		$\frac{0,56}{100}$		$\frac{0,39}{100}$

Die unter „Beobachtet“ angegebenen Zahlen sind die zwischen den betreffenden Temperaturen und 20° gefundenen specifischen Wärmen. Die folgenden Reihen geben die Aenderungen, welche die betreffenden specifischen Wärmen erleiden müssen, wenn bei der Beobachtung die in der Tabelle angegebenen Fehler vorgekommen sind. Diese Fehler sind die wahrscheinlich grössten, welche bei der Bestimmung des Wasserwerthes beim Ablesen am Thermometer vorkommen können.

Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, sind die Fehler um so grösser, je enger die Temperaturgrenzen sind. Die Summe

der Fehler von 1,37 Proc. wird höchst wahrscheinlich nie eintreten, da die einzelnen Fehler sich zum Theil compensiren werden, und die Fehlergrenze unter 1,0 Proc. bleiben wird.

In dem Folgenden bedeutet:

R Wasserwerth des Calorimeters sammt Thermometer und Rührer,

r Wasserwerth des Fläschchens,

p das Gewicht der Flüssigkeit vor den Versuchen bei bestimmter Temperatur,

p_1 das Gewicht nach diesen Versuchen,

T Temperatur des Heizbades,

t Temperatur des Calorimeters beim Eintauchen,

t_1 Temperatur des Calorimeters nach erfolgtem Wärmeausgleich,

$\Sigma \Delta t$ Correctionsglied für Wärmestrahlung.

Alkohole.

Methylalkohol. Sp. 66,3°. B. 753 mm.

$R = 85,0$, $r = 0,792$, $p = 5,154$, $p_1 = 5,152$.

T	t	t'	$\Sigma \Delta t$	c
35,25	15,579	14,725	+0,069	0,6211
34,55	15,170	14,263	+0,001	0,6185
35,00	15,800	14,905	-0,0	0,6164
34,93	15,52			0,6187*

$p = 5,151$, $p_1 = 5,148$.

44,80	19,030	17,807	-0,002	0,6287
45,60	19,675	18,480	+0,042	0,6336
45,60	19,995	18,830	+0,051	0,6330
45,00	19,865	18,717	+0,048	0,6330
45,05	19,64			0,6308

$r = 0,819$, $p = 4,922$, $p_1 = 4,915$.

50,45	17,615	16,103	+0,024	0,6419
50,45	18,040	16,543	+0,016	0,6408
50,13	18,522	17,066	+0,005	0,6372
50,35	18,05			0,6400*

$r = 0,792$, $p = 5,146$, $p_1 = 5,144$.

62,35	20,398	18,370	+0,040	0,6605
62,40	20,575	18,566	+0,040	0,6565
62,25	20,850	18,646	+0,040	0,6582
62,33	20,54			0,6583*

29*

Aethylalkohol.

Sp. 78,1°. B. 753 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
35,10	15,66	0,5788*
45,74	20,69	0,6037
55,96	19,38	0,6193*
62,92	19,82	0,6330
73,43	20,54	0,6519*

Propylalkohol.

Sp. 97,1°. B. 752 mm.

42,19	16,47	0,5882*
53,41	20,61	0,6113
65,21	20,43	0,6296*
78,53	19,49	0,6481
90,80	20,74	0,6677*

Butylalkohol.

Sp. 117°. B. 760 mm.

42,63	16,87	0,5806*
53,75	20,01	0,6018
65,75	20,57	0,6254
78,80	19,50	0,6392*
92,60	20,89	0,6472
115,80	20,31	0,6834*

Amylalkohol.

Sp. 129,7°. B. 760 mm.

100,10	20,52	0,6508*
111,59	22,17	0,6700*
124,50	22,21	0,6865*

Caprylalkohol.

Sp. 177,8°. B. 760 mm.

64,35	17,97	0,6125*
163,2	27,65	0,6671*
176,7	28,67	0,6724
185,7	27,17	0,6765
195,8	27,85	0,6816*

Allylalkohol.

Sp. 97,0°. B. 750 mm.

43,20	18,28	0,6000*
54,85	19,49	0,6148
72,70	20,74	0,6466*
94,30	21,70	0,6500*

Benzylalkohol.

Sp. 204°. B. 743 mm.

82,60	17,38	0,5047*
94,80	21,63	0,5100*
185,8	23,10	0,5246
202,0	25,51	0,5320
212,4	24,93	0,5537*

Aldehyde und Ketone.**Paraldehyd.**

Sp. 124,0°. B. 760 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
46,83	20,80	0,4358
100,80	20,11	0,4674*
111,60	21,57	0,4682*
124,05	21,15	0,4694*

Propylaldehyd.

Sp. 48,0°. B. 760 mm.

41,50	15,88	0,5570*
47,0	20,72	0,5600
51,20	16,98	0,5621*
55,60	17,31	0,5642*

Valeral.

Sp. 93,5°. B. 765 mm

62,3	17,10	0,5202*
82,6	18,72	0,5344*
95,3	19,20	0,5526
111,7	22,51	0,5614*

Oenanthol.

Sp. 152,0°. B. 749 mm.

146,6	25,72	0,5531*
155,4	27,11	0,5618*
163,2	26,70	0,5678*
175,3	27,05	0,5652

Aceton.

Sp. 56,3°. B. 760 mm.

52,6	16,44	0,5594*
60,3	17,63	0,5659
70,2	18,90	0,5667*
79,1	18,70	0,5680*

Methylhexylketon.

Sp. 173°. B. 753 mm.

85,7	17,79	0,5266*
166,5	23,55	0,5519*
174,5	23,73	0,5578
183,9	23,77	0,5566*
190,0	24,62	0,5534

Säuren.**Ameisensäure.**

Sp. 99°. B. 760 mm.

62,3	18,09	0,5149*
81,0	20,16	0,5207
96,2	21,04	0,5267*
112,6	24,85	0,5278*

Orthoameisensäure.

Sp. 108°. B. 748 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
66,8	19,54	0,6171*
94,6	23,50	0,6362*
122,1	26,00	0,6432*
133,1	27,00	0,6456

Essigsäure.

Sp. 117,4°. B. 748 mm.

61,3	19,59	0,5108*
74,3	18,32	0,5160*
85,4	18,85	0,5206*

Buttersäure.

Sp. 163°. B. 760 mm.

82,25	18,89	0,5086
93,9	20,50	0,5127*
158,5	26,25	0,5404*
168,2	26,05	0,5432*
175,1	21,86	0,5402

Isobuttersäure.

Sp. 154°. B. 760 mm.

67,75	18,16	0,4912
94,8	20,25	0,5120*
146,1	26,20	0,5419*
162,0	27,16	0,5453
175,1	27,53	0,5471*

Isovaleriansäure.

Sp. 173,2°. B. 760 mm.

64,15	17,37	0,4769*
94,8	20,00	0,4967
160,6	27,61	0,5450*
175,7	28,75	0,5583
186,3	26,97	0,5635
196,7	28,02	0,5700*

Capronsäure.

Sp. 199,0°. B. 760 mm.

81,2	19,45	0,5068*
192,8	25,91	0,5676*
197,8	26,57	0,5701
202,3	27,23	0,5714
210,2	28,12	0,5723*

Kohlenwasserstoffe.

Benzol. Sp. 79,3°. B. 739 mm.

43,22	20,18	0,4133*
60,30	19,03	0,4192
66,27	19,33	0,4221
70,55	18,57	0,4294*
77,78	19,65	0,4318
91,32	20,64	0,4332*

Toluol.

Sp. 110,0°. B. 741 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
44,00	19,67	0,4160*
60,65	19,18	0,4227
67,15	19,27	0,4298
71,67	18,72	0,4317
78,75	19,63	0,4349*
92,15	20,84	0,4378
116,0	20,53	0,4404*

Aethylbenzol.

Sp. 135,5°. B. 746 mm.

43,70	19,81	0,4236*
64,15	18,58	0,4384
90,80	19,41	0,4480*
122,1	21,40	0,4566
128,15	21,29	0,4572
132,3	22,50	0,4582
142,5	22,30	0,4630*
153,2	25,09	0,4534

Mesitylen.

Sp. 163,0°. B. 743 mm.

43,35	18,52	0,4242
64,63	19,10	0,4394*
91,20	19,79	0,4516*
129,9	21,76	0,4626*

Amylen.

Sp. 35,0°. B. 744 mm.

29,90	17,73	0,5266*
36,73	15,39	0,5379
41,95	15,56	0,5381*
49,15	16,75	0,5414*

Caprylen.

Sp. 123,0°. B. 743 mm.

43,00	17,67	0,4164*
54,56	18,51	0,5238*
72,4	19,23	0,5362
91,2	21,52	0,5427*

Diallyl.

Sp. 58,5°. B. 744 mm.

29,68	18,31	0,5050*
36,51	18,55	0,5159
44,15	17,98	0,5175*
54,50	18,88	0,5225*

Hexan.

Sp. 68,9°. B. 760 mm.

52,8	16,24	0,5517*
60,9	17,30	0,5591*
70,8	18,46	0,5652*
79,5	18,23	0,5615

Aetherarten.**Allylacetat.**

Sp. 104,5°. B. 760 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
83,4	18,81	0,4698*
92,1	19,47	0,4748*
100,9	19,60	0,4834
109,1	20,36	0,4838*

Propylacetat.

Sp. 102,0°. B. 760 mm.

83,6	19,00	0,4815*
91,75	19,61	0,4848*
100,9	19,64	0,4894
108,9	20,59	0,4906*

Aethylcinnamat.

Sp. 267,5°. B. 741 mm.

70,1	16,19	0,4137*
173,7	20,65	0,4541*
181,7	21,59	0,4559
192,3	20,95	0,4576*

Aethylhydrocinnamat.

Sp. 244,8°. B. 738 mm.

70,25	16,34	0,4185*
95,7	23,40	0,4376
128,4	20,18	0,4626
141,8	20,14	0,4635
158,1	20,70	0,4687*
184,4	21,66	0,4765*

Aethyloxalat.

Sp. 184°. B. 741 mm.

94,2	20,93	0,4418*
173,8	24,18	0,4638*
184,0	23,92	0,4681
188,9	24,80	0,4662*

Aethylcarbonat.

Sp. 126,0°. B. 748 mm.

101,1	24,10	0,4628*
118,6	24,62	0,4791*
131,7	25,15	0,4818*
143,4	25,68	0,4795

Acetessigester.

Sp. 180,9°. B. 754 mm.

70,35	15,10	0,4548*
144,6	21,0	0,4795*
157,7	21,77	0,4887
170,4	21,77	0,4904
183,5	22,98	0,4926*

Methylal.

Sp. 42,3°. B. 760 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
30,60	14,89	0,5036*
36,85	15,63	0,5092*
42,10	15,78	0,5097
50,1	17,26	0,5056*

Acetal.

Sp. 104°. B. 744 mm.

71,6	15,75	0,4957*
93,3	20,81	0,5085*
102,9	23,84	0,5136
108,8	22,23	0,5186*

Aethyldichloracetat.

Sp. 156,0°. B. 738 mm.

67,85	17,89	0,3292*
140,1	21,18	0,3449*
152,7	21,32	0,3470
164,1	22,19	0,3482
170,7	21,51	0,3480*

Aethyltrichloracetat.

Sp. 166,0°. B. 738 mm.

69,75	15,93	0,2880*
148,6	20,33	0,2959
157,7	21,15	0,2987*
171,2	21,17	0,3020*
183,5	22,14	0,3005

Aethyl- α -Chlorpropionat.

Sp. 146,5°. B. 750 mm.

79,25	18,37	0,3972*
127,2	19,97	0,4067*
142,8	20,08	0,4092
158,0	20,56	0,4113*

Aethyldichlorpropionat.

Sp. 183,5°. B. 760 mm.

69,45	16,56	0,3517*
179,2	27,04	0,3616
186,4	24,92	0,3698*
191,3	24,26	0,3707*

Säurechloride.**Acetylchlorid.**

Sp. 51,2°. B. 760 mm.

40,45	16,05	0,3550*
60,8	17,45	0,3575*
70,5	17,90	0,3589*

Propionylehlorid.

Sp. 79,3°. B. 760 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
61,25	17,36	0,3783*
71,1	18,00	0,3743
80,0	18,40	0,3758*
92,0	19,05	0,3767*

Butyrylehlorid.

Sp. 100,0°. B. 734 mm.

71,65	16,41	0,3916*
102,5	22,51	0,3993*
107,8	21,66	0,4003
117,8	21,15	0,4019*

Isobutyrylehlorid.

Sp. 92,0°. B. 748 mm.

70,8	21,55	0,3746*
81,4	21,84	0,3850*
95,2	19,23	0,3880*

Valerylehlorid.

Sp. 114,0°. B. 726 mm.

63,55	17,50	0,3962*
109,6	19,31	0,4185*
117,6	19,68	0,4216
128,3	19,44	0,4224*

Benzoylehlorid.

Sp. 194,0°. B. 742 mm.

83,25	17,22	0,3286*
174,6	22,58	0,3506*
184,6	23,27	0,3521
194,1	24,16	0,3554
204,4	24,55	0,3582*

Phtalylehlorid.

Sp. 275,4°. B. 726 mm.

71,3	17,07	0,2993*
147,1	20,49	0,3132*
164,8	21,44	0,3178
174,0	21,55	0,3200
202,2	21,54	0,3233*

Haloidäther.**Aethylenchlorid.**

Sp. 84,8°. B. 751 mm.

50,8	16,6	0,3040
71,0	19,64	0,3113*
81,2	19,64	0,3133*
91,2	22,80	0,3098*

Aethylidenchlorid.

Sp. 65,0°. B. 751 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
35,9	13,9	0,2920
51,1	16,80	0,2985*
61,1	17,41	0,3020*
70,9	17,85	0,2961*

Allylehlorid.

Sp. 45,4°. B. 760 mm.

37,35	15,29	0,3895*
45,7	16,84	0,3934*
53,4	16,78	0,3938
61,0	17,24	0,3950*

Propylehlorid.

Sp. 47,6°. B. 760 mm.

37,0	15,29	0,4031*
45,1	15,83	0,4046*
53,0	16,77	0,4052
60,0	17,17	0,4073*

Propylbromid.

Sp. 70,5°. B. 740 mm.

47,9	16,4	0,2566
71,5	19,42	0,2625*
81,2	19,45	0,2645*
91,1	22,40	0,2612*

Isopropylbromid.

Sp. 61,5°. B. 760 mm.

36,0	13,9	0,2560
51,8	16,86	0,2603*
60,9	17,47	0,2611*
71,4	18,00	0,2598*

Propyljodid.

Sp. 101,7°. B. 741 mm.

67,8	20,78	0,1945*
78,4	19,96	0,1969*
93,2	19,21	0,1990
110,7	21,57	0,2008*

Isobutyljodid.

Sp. 120°. B. 745 mm.

66,65	17,38	0,2132*
101,5	23,79	0,2212
118,7	24,24	0,2298*
131,4	24,54	0,2258
143,6	25,37	0,2216*

Chlorbenzol.

Sp. 132,3°. B. 760 mm.

120,6	21,0	0,3390*
133,2	22,37	0,3440*
142,8	21,88	0,3470*
151,5	24,34	0,3440

Brombenzol.

Sp. 154,8°. B. 742 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
82,45	17,58	0,2417*
140,9	21,00	0,2522*
152,5	21,15	0,2539
163,9	21,90	0,2548*
170,9	21,40	0,2577

Amine.

Anilin.

Sp. 182,5°. B. 738 mm.

69,45	16,59	0,4986*
179,2	27,74	0,5136*
185,8	24,78	0,5141
191,2	25,0	0,5148*

Orthotoluidin.

Sp. 198,4°. B. 735 mm.

94,9	20,68	0,4931*
192,2	25,74	0,5218*
203,1	27,04	0,5283*
210,6	27,83	0,5183

Dimethylanilin.

Sp. 192,6°. B. 758 mm.

94,1	18,79	0,4459*
175,3	23,04	0,4749*
184,3	23,64	0,4772
205,5	24,77	0,4840*

Methyldiphenylamin.

Sp. 292°. B. 741 mm.

79,9	19,44	0,4148*
171,6	21,05	0,4491
183,1	21,24	0,4582*
194,1	20,61	0,4620*

Triäthylamin.

Sp. 88,5°. B. 737 mm.

71,5	21,86	0,5185*
81,8	21,87	0,5342*
94,6	19,51	0,5461*

Sonstige Verbindungen.

Chloral.

Sp. 97,5°. B. 750 mm.

<i>T</i>	<i>t</i>	<i>c</i>
67,6	20,91	0,2538*
78,4	20,43	0,2555*
92,5	19,56	0,2566*
109,6	21,81	0,2556

Butylchloral.

Sp. 165,5°. B. 750 mm.

82,7	18,53	0,3105*
158,3	25,28	0,3108*
167,7	25,05	0,3111
176,0	25,28	0,3129
183,9	23,43	0,3140*

Mesityloxyd.

Sp. 131,5°. B. 751 mm.

71,3	17,16	0,4822*
95,5	22,76	0,5006*
108,8	19,33	0,5121
118,0	19,63	0,5138
129,4	19,45	0,5156
141,9	21,47	0,5161*

Furfurol.

Sp. 161,6°. B. 754 mm.

71,65	17,37	0,4085*
146,3	20,76	0,4318
165,5	21,78	0,4225*
173,5	21,95	0,4335*

Nitrobenzol.

Sp. 209,4°. B. 745 mm.

82,35	18,34	0,3675*
172,0	23,66	0,3861
185,6	23,03	0,3969*
213,4	24,75	0,4007*

Tetrachloräthylen.

Sp. 120°. B. 747 mm.

71,35	18,09	0,2134*
108,6	19,00	0,2151*
125,9	20,38	0,2167*
138,9	21,58	0,2123

Aus diesen Zahlen sind die mit Sternen bezeichneten benutzt worden, um nach oben angegebener Gleichung die Constanten *k*, *a* und *b* zu berechnen.

Folgende Tabelle gibt die aus dieser Berechnung hervorgehenden Zahlen, und zwar enthalten die Reihen III, IV, V *k*, *a* und *b*.

I	II	III	IV	V
Methylalkohol . . .	CH_4O	0,5633	+0,001 050 4	+0,000 001 754
Aethylalkohol . . .	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	0,5088	+0,001 362 4	+0,000 001 996
Propylalkohol . . .	$\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$	0,4946	+0,001 665 3	-0,000 001 286
Butylalkohol . . .	$\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$	0,4660	+0,002 071 4	-0,000 003 893
Amylalkohol . . .	$\text{C}_5\text{H}_{12}\text{O}$	0,3382	+0,003 496	-0,000 008 761
Caprylalkohol . . .	$\text{C}_8\text{H}_{18}\text{O}$	0,5663	+0,000 598 4	-0,000 000 415 0
Allylalkohol . . .	$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	0,3857	+0,004 693	-0,000 024 58
Benzylalkohol . . .	$\text{C}_7\text{H}_8\text{O}$	0,4660	+0,000 445 7	-0,000 000 683 9
Paraldehyd . . .	$\text{C}_2\text{H}_2\text{O}_3$	0,4358	+0,000 388 4	-0,000 001 306
Propylaldehyd . . .	$\text{C}_3\text{H}_4\text{O}$	0,5221	+0,000 714 6	-0,000 002 298
Valeral	$\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}$	0,3647	+0,002 567	-0,000 009 227
Oenanthol	$\text{C}_9\text{H}_{18}\text{O}$	0,3651	+0,001 326	-0,000 001 564
Aceton	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	0,5168	+0,000 836 9	-0,000 003 765
Methylhexylketon . . .	$\text{C}_8\text{H}_{16}\text{O}$	0,4973	+0,000 280 8	+0,000 000 044 3
Ameisensäure . . .	$\text{C H}_2\text{O}_2$	0,4372	+0,001 374	-0,000 006 101
Arthoameisensäure . .	$\text{C H}_4\text{O}_3$	0,5070	+0,001 729	-0,000 006 406
Essigsäure	$\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	0,4453	+0,001 043	-0,000 003 727
Buttersäure	$\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	0,4447	+0,000 708 4	-0,000 001 170
Isobuttersäure	$\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	0,4182	+0,000 998 2	-0,000 001 869
Isovaleriansäure . . .	$\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}_2$	0,4292	+0,000 642 2	-0,000 000 317
Capronsäure	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2$	0,4100	+0,001 144	-0,000 002 159
Benzol	C_6H_6	0,3231	+0,002 131	-0,000 011 11
Toluol	C_7H_8	0,3957	+0,000 275 0	+0,000 000 516 8
Aethylbenzol	C_8H_{10}	0,3756	+0,000 888 9	-0,000 002 466
Mesitylen	C_9H_{12}	0,3822	+0,000 847 4	-0,000 002 369
Amylen	C_5H_{10}	0,2820	+0,007 722	-0,000 076 64
Caprylen	C_8H_{16}	0,4710	+0,000 865 6	-0,000 002 412
Diallyl	C_6H_{10}	0,4070	+0,000 267 4	-0,000 018 01
Hexan	C_6H_{14}	0,5130	+0,000 366 5	+0,000 003 497
Allylacetat	$\text{C}_5\text{H}_8\text{O}_2$	0,4043	+0,000 734 1	-0,000 001 068
Propylacetat	$\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_2$	0,4192	+0,000 787 3	-0,000 002 076
Aethylcinnamat . . .	$\text{C}_{11}\text{H}_{12}\text{O}_2$	0,3590	+0,000 345 4	-0,000 000 141 4
Aethylhydrocinnamat	$\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{O}_2$	0,3390	+0,001 080	-0,000 002 212
Aethylloxalat	$\text{C}_8\text{H}_{10}\text{O}_4$	0,4022	+0,000 522 3	-0,000 001 202
Aethylcarbonat . . .	$\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_3$	0,2464	+0,002 804	-0,000 009 596
Acetessigester	$\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_3$	0,4300	+0,000 284 1	+0,000 000 104 3
Methylal	$\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_3$	0,3558	+0,005 198	-0,000 054 62
Acetal	$\text{C}_4\text{H}_{14}\text{O}_2$	0,4674	+0,000 192 5	+0,000 001 756
Aethyldichloracetat .	$\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_2\text{Cl}_2$	0,3037	+0,000 345 4	-0,000 000 660 5
Aethyltrichloracetat .	$\text{C}_4\text{H}_5\text{O}_2\text{Cl}_3$	0,2950	-0,000 169 7	+0,000 001 187

I	II	III	IV	V
Aethyl- α -Chlorpropionat	$C_5H_9O_2Cl_2$	0,3716	+0,000 301 5	-0,000 000 515 0
Aethyldichlorpropionat	$C_5H_8O_2Cl_2$	0,3429	+0,000 086 21	+0,000 000 222
Acetylchlorid	C_2H_3OCl	0,3389	+0,000 466 9	-0,000 002 88
Propionylchlorid	C_3H_5OCl	0,3646	+0,000 367 5	-0,000 001 426
Butyrylchlorid	C_4H_7OCl	0,3712	+0,000 245 5	-0,000 000 192 9
Isobutyrylchlorid	C_4H_7OCl	0,1292	+0,003 982	-0,000 017 47
Valerylchlorid	C_5H_9OCl	0,3201	+0,001 197	-0,000 003 865
Benzoylchlorid	C_7H_5OCl	0,3076	+0,000 201 7	+0,000 000 094 1
Phthalylchlorid	$C_8H_4O_2Cl_2$	0,2844	+0,000 161 8	+0,000 000 052 2
Aethylenchlorid	$C_2H_4Cl_2$	0,2610	+0,000 823 5	-0,000 003 590
Aethyldienchlorid	$C_2H_4Cl_2$	0,2723	+0,000 423 1	-0,000 000 673 9
Allylchlorid	C_3H_5Cl	0,3135	+0,002 198	-0,000 017 78
Propylchlorid	C_3H_7Cl	0,3900	+0,000 218 8	-0,000 000 445 7
Propylbromid	C_3H_7Br	0,2403	+0,000 273 2	-0,000 003 886
Isopropylbromid	C_3H_7Br	0,2310	+0,000 686 3	-0,000 004 626
Propyljodid	C_3H_7J	0,1426	+0,000 840 4	-0,000 003 509
Isobutyljodid	C_4H_9J	0,1140	+0,001 675	-0,000 007 039
Chlorbenzol	C_6H_5Cl	0,2735	+0,000 554 3	-0,000 000 737 5
Brombenzol	C_6H_5Br	0,2150	+0,000 323 1	-0,000 000 653 7
Anilin	C_6H_7N	0,4844	+0,000 179 5	+0,000 000 207 3
Orthotoluidin	C_7H_9N	0,4540	+0,000 360 3	-0,000 000 259 8
Dimethylanilin	$C_8H_{11}N$	0,3938	+0,000 514 7	-0,000 000 593 4
Methyldiphenylamin	$C_{13}H_{13}N$	0,3676	+0,000 501 9	-0,000 000 315 8
Triäthylamin	$C_6H_{15}N$	0,2455	+0,003 951	-0,000 013 45
Chloral	C_2HOCl_3	0,2308	+0,000 331 1	-0,000 000 98
Butylchloral	$C_6H_5OCl_3$	0,3244	-0,000 209 4	+0,000 008 352
Mesityloxyd	$C_6H_{10}O$	0,4035	+0,001 100	-0,000 000 283 6
Furfurol	$C_5H_4O_2$	0,3685	+0,000 539 7	-0,000 001 159
Nitrobenzol	$C_6H_5NO_2$	0,3169	+0,000 611 2	-0,000 001 189
Tetrachloräthylen	C_2Cl_4	0,2105	+0,000 018 85	+0,000 000 171 3

Um die spezifische Wärme der Flüssigkeiten untereinander vergleichen zu können, musste eine Temperatur gewählt werden, die für die Flüssigkeiten charakteristisch war. Es wurde deshalb der Siedepunkt gewählt, und die spezifische Wärme zwischen demselben und 20°, welche Temperatur am nächsten derjenigen war, die bei den Beobachtungen benutzt wurde, nach angegebener Formel berechnet. Ebenso

wurde die spezifische Wärme zwischen 100° und 20° berechnet.

In den folgenden Tabellen enthält die Columnne III die spezifische Wärme zwischen 20° und dem Siedepunkt, IV die Molecularwärme, d. i. das Product der spezifischen Wärme mit dem Moleculargewicht der betreffenden Flüssigkeit, V die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Molecularwärmen, VI die spezifische Wärme zwischen 20° und 100°, VII die betreffende Molecularwärme, VIII die Differenz.

Homologe Verbindungen.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Methylalkohol	CH_4O	0,6544	20,96	—	0,7082	22,65	—
Aethylalkohol	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	0,6587	30,31	9,32	0,6970	32,06	9,41
Propylalkohol	$\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$	0,6748	40,50	10,19	0,6786	40,71	8,65
Butylalkohol	$\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$	0,6873	50,91	10,41	0,6675	49,39	8,48
Amylalkohol	$\text{C}_5\text{H}_{12}\text{O}$	0,6877	60,54	9,63	0,6499	57,12	7,73
Caprylalkohol	$\text{C}_8\text{H}_{18}\text{O}$	0,6776	87,54	3. 9,00	0,6350	82,55	3. 8,37
				9,69			8,52
Propylaldehyd	$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	0,5623	32,61	—	0,5794	33,60	—
Valeral	$\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}$	0,5543	47,66	2. 7,52	0,5584	48,01	2. 7,20
Oenanthal	$\text{C}_7\text{H}_{14}\text{O}$	0,5516	62,88	2. 7,61	0,5349	60,96	2. 6,48
				7,56			6,84
Aceton	$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	0,5622	32,60	—	0,5706	33,09	—
Methylhexylketon	$\text{C}_8\text{H}_{16}\text{O}$	0,5530	70,77	5. 7,65	0,5305	67,90	5. 6,98
Ameisensäure	CH_2O_2	0,5264	24,20	—	0,5264	24,20	—
Essigsäure	$\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	0,5265	31,59	7,39	0,5240	31,44	7,24
Buttersäure	$\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	0,5388	47,41	2. 7,91	0,5152	45,34	2. 6,95
Isovaleriansäure	$\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}_2$	0,5487	55,96	8,56	0,5000	51,00	5,66
Capronsäure	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2$	0,5654	65,59	9,65	0,5203	60,35	9,35
				8,38			7,55
Benzol	C_6H_6	0,4931	33,77	—	0,4910	33,50	—
Toluol	C_7H_8	0,4496	41,30	7,53	0,4355	40,06	6,50
Aethylbenzol	C_8H_{10}	0,4607	48,83	7,53	0,4517	47,88	7,82
Mesitylen	C_9H_{12}	0,4730	56,76	7,93	0,4593	55,11	7,23
				7,66			7,18
Amylen	C_5H_{10}	0,5428	37,99	—	—	—	—
Caprylen	C_8H_{16}	0,5514	61,75	3. 7,90	0,5448	60,90	—
Methylal	$\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_2$	0,5061	38,46	—	—	—	—
Acetal	$\text{C}_6\text{H}_{14}\text{O}_2$	0,5147	60,73	3. 7,76	0,5125	60,47	—

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Acetylchlorid	C_2H_3OCl	0,3577	27,89	—	0,3565	27,80	—
Propionylchlorid . . .	C_3H_5OCl	0,3763	34,62	6,73	0,3774	34,72	6,92
Butyrylchlorid	C_4H_7OCl	0,3983	42,22	7,60	0,3983	42,12	7,50
Valerylchlorid	C_5H_9OCl	0,4101	50,42	8,20	0,4161	49,93	7,51
				7,41			7,38
Aethyldichloracetat . .	$C_4H_6O_2Cl_2$	0,3461	54,33	—	0,3370	52,90	—
Aethyldichlorpropionat	$C_5H_8O_2Cl_2$	0,3687	62,64	8,31	0,3504	59,92	7,02
Anilin	C_6H_7N	0,5130	47,71	—	0,5034	49,81	—
Orthotoluidin	C_7H_9N	0,5214	55,79	8,08	0,4940	52,86	6,05
Chloral	C_2HCl_3O	0,2581	37,68	—	0,2575	37,60	—
Butylchloral	$C_4H_5Cl_3O$	0,3116	53,82	2. 8,07	0,3096	53,75	2. 8,07
Propyljodid	C_3H_7J	0,2002	34,03	—	0,2000	34,00	—
Isobutyljodid	C_4H_9J	0,2275	41,86	7,83	0,2280	41,95	7,95

Isomere Verbindungen.

Propylaldehyd	C_3H_5O	0,5623	32,61	—	0,5794	33,60	—
Aceton	C_3H_6O	0,5622	32,60	0,01	0,5706	33,09	0,51
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	0,5388	47,41	—	0,5152	45,34	—
Isobuttersäure	$C_4H_8O_2$	0,5410	47,60	0,19	0,5146	45,28	0,06
Butyrylchlorid	C_4H_7OCl	0,3983	41,22	—	0,3983	42,22	—
Isobutyrylchlorid . . .	C_4H_7OCl	0,3883	41,05	1,17	0,3911	41,45	0,77
Aethylenchlorid	$C_2H_4Cl_2$	0,3140	31,08	—	0,3153	31,21	—
Aethylidenchlorid . . .	$C_2H_4Cl_2$	0,3047	30,15	0,93	0,3147	31,15	0,06
Propylbromid	C_3H_7Br	0,2624	32,26	—	0,2560	31,48	—
Isopropylbromid	C_3H_7Br	0,2620	32,20	0,06	0,2580	31,76	0,28
Propylacetat	$C_5H_{10}O_2$	0,4886	49,84	—	0,4880	49,84	—
Isovaleriansäure	$C_5H_{10}O_2$	0,5487	55,96	6,12	0,5000	51,00	1,12
Allylalkohol	C_3H_5O	0,6569	38,08	—	0,6441	37,35	—
Propylaldehyd	C_3H_5O	0,5623	32,60	5,48	0,5794	33,60	3,75

Verbindungen mit C-Differenzen.

Amylen	C_5H_{10}	0,5428	37,99	—	—	—	—
Diallyl	C_6H_{10}	0,5270	43,21	5,22	—	—	—
Aethylbenzol	C_8H_{10}	0,4607	48,83	2. 2,81	—	—	—
Aethylalkohol	C_3H_8O	0,6587	30,31	—	0,6970	32,06	—
Allylalkohol	C_3H_8O	0,6567	38,08	7,77	0,6441	37,35	5,30

VIII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
—	Propylalkohol	C_3H_8O	0,6748	40,50	—	0,6786	40,71	—
6,92	Benzylalkohol	C_7H_8O	0,5344	58,71	4. 4,55	0,5110	55,18	4. 3,82
7,50	Butylalkohol	$C_4H_{10}O$	0,6873	50,91	—	0,6675	49,39	—
7,51	Mesityloxyd	$C_9H_{10}O$	0,5130	50,27	0,64	0,5003	49,03	0,36
7,38	Aethylcarbonat	$C_5H_{10}O_3$	0,4751	56,06	—	0,4640	54,75	—
7,02	Acetessigester	$C_6H_{10}O_3$	0,4910	63,83	7,77	0,4770	62,01	7,26
—	Valeral	$C_5H_{10}O$	0,5543	47,66	—	0,5584	48,01	—
6,05	Mesityloxyd	$C_9H_{10}O$	0,5130	50,27	2,60	0,5003	49,03	1,0
—	Methylal	$C_3H_8O_2$	0,5061	38,46	—	—	—	—
8,07	Buttersäure	$C_4H_8O_2$	0,5388	47,41	8,95	0,5152	45,34	—
—	Allylacetat	$C_6H_8O_2$	0,4814	48,14	0,73	0,4791	47,91	2,57
7,95	Essigsäure	$C_2H_4O_2$	0,5265	31,59	—	0,5240	31,44	—
—	Furfural	$C_5H_4O_2$	0,4312	41,39	3. 3,40	0,4185	40,17	3. 2,91
—	Capronsäure	$C_6H_{12}O_2$	0,5654	65,59	—	0,5203	60,35	—
0,51	Aethylcinnamat . . .	$C_{11}H_{12}O_2$	0,4620	81,31	5. 3,12	0,4300	75,68	5. 3,06
—	Acetal	$C_6H_{14}O_2$	0,5147	60,73	—	0,5725	60,47	—
0,06	Aethylhydrocinnamat .	$C_{11}H_{14}O_2$	0,4808	85,58	5. 4,95	0,4412	78,53	2. 3,61
—	Allylchlorid	C_3H_5Cl	0,3984	30,26	—	—	—	—
0,77	Chlorbenzol	C_6H_5Cl	0,3426	38,37	3. 2,70	—	—	—
—	Propionylchlorid . . .	C_3H_5OCl	0,3763	34,62	—	0,3774	34,72	—
0,06	Benzoylchlorid . . .	C_7H_5OCl	0,3538	49,53	4. 3,72	0,3330	46,62	4. 2,97

Verbindungen mit H_2 -Differenzen.

0,28	Benzol	C_6H_6	0,4331	33,77	—	0,4310	33,50	—
—	Diallyl	C_6H_{10}	0,5270	43,21	2. 4,72	0,4975	40,79	2. 3,65
1,12	Hexan	C_6H_{14}	0,5690	48,93	2. 2,86	0,6000	51,60	2. 5,40
—	Aethylbenzol	C_8H_{10}	0,4607	48,83	—	0,4517	47,88	—
3,75	Caprylen	C_8H_{16}	0,5514	61,75	3. 4,36	0,5448	60,90	3. 4,34
—	Allylalkohol	C_3H_6O	0,6567	38,08	—	0,6441	37,25	—
—	Propylalkohol	C_3H_8O	0,6748	40,50	2,42	0,6786	40,71	3,46
—	Allylacetat	$C_5H_8O_2$	0,4814	48,14	—	0,4791	47,91	—
—	Propylacetat	$C_5H_{10}O_2$	0,4888	49,84	1,70	0,4880	49,77	1,86
—	Allylchlorid	C_3H_5Cl	0,3984	30,26	—	—	—	—
5,30	Propylchlorid	C_3H_7Cl	0,4042	31,60	1,34	—	—	—

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Aethylcinnamat . . .	$C_{11}H_{12}O_2$	0,4620	81,31	—	0,4300	75,68	—
Aethylhydrocinnamat .	$C_{11}H_{14}O_2$	0,4808	85,58	4,27	0,4412	78,53	2,85
Anilin	C_6H_7N	0,5130	47,71	—	0,5034	46,81	—
Triäthylamin	$C_6H_{15}N$	0,5376	54,30	4. 1,65	0,5528	55,87	4. 2,26
Furfural	$C_5H_4O_2$	0,4302	41,39	—	0,4185	40,17	—
Allylacetat	$C_8H_{10}O_2$	0,4814	48,14	2. 3,38	0,4791	47,91	2. 3,87
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	0,5487	55,96	7,82	0,5000	51,00	3,09
Benzylalkohol	C_7H_8O	0,5344	58,71	—	0,5110	55,18	—
Oenanthol	$C_7H_{14}O$	0,5516	62,88	3. 1,39	0,5349	60,96	3. 1,93
Methylhexylketon . . .	$C_8H_{16}O$	0,5530	70,77	—	0,5305	67,90	—
Caprylalkohol	$C_8H_{18}O$	0,6776	87,54	16,77	0,6350	82,55	14,65
Capronsäure	$C_{10}H_{20}O_2$	0,5654	65,59	—	0,5203	60,35	—
Acetal	$C_6H_{14}O_2$	0,5147	60,73	—4,86	0,5125	60,47	0,12
Propylaldehyd	C_3H_6O	0,5623	32,61	—	0,5794	33,60	—
Propylalkohol	C_3H_8O	0,6748	40,50	7,89	0,6786	40,71	7,4
Valeral	$C_5H_{10}O$	0,5543	47,66	—	0,5584	48,01	—
Amylalkohol	$C_5H_{12}O$	0,6877	60,54	12,88	0,6499	57,12	9,4

Verbindungen mit 0-Differenzen.

Amylen	C_5H_{10}	0,5428	37,99	—	—	—	—
Valeral	$C_5H_{10}O$	0,5543	47,66	9,67	—	—	—
Diallyl	C_6H_{10}	0,5270	43,21	—	—	—	—
Mesityloxyd	$C_6H_{10}O$	0,5130	50,27	7,06	—	—	—
Toluol	C_7H_8	0,4496	41,30	—	0,4355	40,06	—
Benzylalkohol	C_7H_8O	0,5344	58,71	17,41	0,5110	55,18	15,12
Caprylen	C_8H_{16}	0,5514	61,75	—	0,5448	60,90	—
Methylhexylketon . . .	$C_8H_{16}O$	0,5530	70,77	9,02	0,5305	67,90	7,00
Methylalkohol	CH_4O	0,6564	20,99	—	0,7082	22,65	—
Orthoameisensäure . . .	CH_4O_2	0,6874	40,79	2. 9,9	0,6353	40,66	2. 9,0
Valeral	$C_5H_{10}O$	0,5543	47,66	—	0,5584	48,01	—
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	0,5487	55,96	8,3	0,5000	51,00	3,00
Propylacetat	$C_5H_{10}O_2$	0,4886	49,84	—	0,4880	49,77	—
Aethylcarbonat	$C_5H_{10}O_3$	0,4751	56,06	6,22	0,4640	54,75	5,00

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
—	Mesityloxyd	$C_6H_{10}O$	0,5130	50,27	—	0,5003	49,03	—
2,85	Acetessigester	$C_6H_{10}O_3$	0,4910	63,83	2. 6,28	0,4770	62,01	2. 6,5
—	Aethyloxalat	$C_6H_{10}O_4$	0,4632	67,62	3,80	0,4500	65,70	3,70
2,26	Valerylchlorid	C_5H_9OCl	0,4202	50,42	—	0,4161	49,93	—
—	Aethylchlorpropionat .	$C_5H_9O_2Cl$	0,4084	55,68	5,26	0,4005	54,57	4,54
3,87	Allylchlorid	C_3H_5Cl	0,3984	30,26	—	—	—	—
3,09	Propionylchlorid . . .	C_3H_5ClO	0,3763	34,62	4,36	—	—	—
—	Butylchloral	$C_4H_5Cl_3O$	0,3116	54,22	—	0,3096	53,86	—
3. 1,93	Aethyltrichloracetat .	$C_4H_5Cl_3O_2$	0,3035	57,66	3,44	0,3007	57,13	3,27
—	Propylalkohol	C_3H_8O	0,6748	40,50	—	—	—	—
14,65	Methylal	$C_3H_8O_2$	0,5061	38,46	—2,0	—	—	—
—	Capronsäure	$C_6H_{12}O_2$	0,5654	65,59	—	0,5203	60,35	—
0,12	Paraldehyd	$C_3H_{12}O_3$	0,4679	61,76	—3,87	0,4663	61,55	1,20

Verbindungen mit Umtausch von H gegen Cl.

—	Propylaldehyd . . .	C_3H_6O	0,5623	32,61	—	0,5794	33,60	—
9,4	Propionylchlorid . .	C_3H_5ClO	0,3763	34,62	2,00	0,3774	34,72	1,12
—	Valeral	$C_5H_{10}O$	0,5543	47,66	—	0,5584	48,01	—
—	Valerylchlorid . . .	C_5H_9ClO	0,4202	50,42	2,76	0,4161	49,93	1,92
—	Buttersäure	$C_4H_8O_2$	0,5388	47,41	—	0,5152	45,34	—
—	Aethylchloracetat . .	$C_4H_6Cl_2O_2$	0,3461	54,33	2. 3,46	0,3370	52,90	2. 3,88
—	Aethyltrichloracetat .	$C_4H_5Cl_3O_2$	0,3035	57,66	3,33	0,3007	57,13	4,23
—	Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	0,5487	55,96	—	0,5000	51,00	—
—	Aethylchlorpropionat	$C_5H_8Cl_2O_2$	0,3687	62,64	2. 3,34	0,3504	59,92	2. 4,46
—	Benzol	C_6H_6	0,4331	33,77	—	0,4310	33,50	—
15,12	Chlorbenzol	C_6H_5Cl	0,3426	38,37	4,60	0,3308	37,04	3,54
—	Butyrylchlorid . . .	C_4H_7ClO	0,3983	42,22	—	0,3983	42,22	—
7,00	Butylchloral	$C_4H_5Cl_3O$	0,3116	54,22	2. 6,0	0,3096	53,86	2. 5,8
—	Acetylchlorid	C_2H_3ClO	0,3577	27,89	—	0,3565	27,80	—
2. 9,0	Chloral	C_2HCl_3O	0,2581	37,68	2. 4,90	0,2575	37,60	2. 4,90

Verbindungen mit NH-Differenz.

—	Benzol	C_6H_6	0,4331	33,77	—	0,4310	33,50	—
5. 5,00	Anilin	C_6H_7N	0,5130	47,71	13,94	0,5034	46,81	13,31

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Toluol	C_7H_8	0,4496	41,30	—	0,4335	40,06	—
Orthotoluidin . .	C_7H_8N	0,5214	55,79	14,49	0,4940	52,86	12,80
Hexan	C_6H_{14}	0,5690	48,93	—	0,6000	51,60	—
Triäthylamin . .	$C_6H_{15}N$	0,5376	54,30	5,63	0,5528	55,87	4,27

Umtausch von Halogenen.

Propylchlorid . .	C_3H_7Cl	0,4042	31,60	—	—	—	—
Propylbromid . .	C_3H_7Br	0,2624	32,26	—	0,2560	31,48	—
Propyljodid . .	C_3H_7J	0,2002	34,33	—	0,2000	34,10	—
Chlorbenzol . .	C_6H_5Cl	0,3426	38,37	—	0,3308	37,04	—
Brombenzol . .	C_6H_5Br	0,2523	39,60	—	0,2457	38,56	—

Aus diesen Tabellen geht hervor, dass die Differenz der Molecularwärme homologer Verbindungen bei 20° Siedepunkt und bei 20 bis 100° recht regelmässig ist, und zwar ergibt sich im ersteren Falle eine Differenz von 8,0 im zweiten 7,5. Eine Ausnahme machen die Alkohole, die eine verhältnissmässig hohe specifische Wärme haben und deshalb die Differenzen 9,7 resp. 8,5 geben.

Bei den isomeren Verbindungen ergibt sich, dass isomere Körper von ähnlicher Zusammensetzung die gleiche Molecularwärme besitzen, dagegen ist die Molecularwärme isomerer Körper unähnlicher Zusammensetzung verschieden.

Bei den Tabellen, die Kohlenstoff-, Wasserstoffdifferenzen etc. enthalten, zeigen sich neben Regelmässigkeiten auch Ausnahmen. Es mag dieses davon herrühren, dass Verbindungen von ganz verschiedener Constitution miteinander verglichen werden.

Da doch das Material nicht genügend gross ist, um mit Sicherheit auf den Einfluss der Constitution einen Rückschluss zu machen, und zumal auch die Bedeutung der inneren Arbeit der Flüssigkeiten für die specifische Wärme nicht bekannt ist, so enthalte ich mich jeder theoretischen Betrachtung und lege meine Beobachtungen vor als einen Anfangsversuch, das Verhältniss der specifischen Wärme flüssiger organischer Verbindungen zu ihrer Zusammensetzung auffindig zu machen.

Um an die berührten Fragen näher herantreten zu können, wird es nothwendig sein, ein möglichst umfangreiches Material zu untersuchen, dessen Beschaffung mir im Augenblick nicht möglich ist.

Im Interesse dieser Untersuchungen, durch welche man gewiss im Stande sein wird, wichtige theoretische Resultate zu Tage zu fördern, möchte ich mich an die chemischen Institute mit der Bitte wenden, mir etwa 20 g von den zu ihrer Verfügung stehenden reinen flüssigen sowohl anorganischen als auch organischen Verbindungen zur Disposition stellen zu wollen, die ich unversehrt zurückzuliefern mich verpflichte, was ich um so eher thun kann, als sie keinerlei Verbrauch unterworfen sind.

Durch solches Entgegenkommen würden diese Untersuchungen zu Ende geführt, und der sich immer wichtiger erweisende physikalische Theil der Chemie durch eine nicht unwichtige Thatsache bereichert werden können.

Technische Hochschule zu Aachen.

V. Beiträge zur Lehre vom inducirten Magnetismus; von Eduard Riecke.¹⁾

I. Zwei approximative Lösungen des Problems der magnetischen Induction.

Wenn man das genannte Problem in approximativer Weise für einen Eisenkörper von beliebig gegebener Gestalt lösen will, so liegt es nahe, die Lösung durch Anwendung

1) Die unmittelbare Veranlassung zu der Veröffentlichung der folgenden Bemerkungen wurde mir durch eine Aeußerung des Hrn. C. Bauer in seiner Abhandlung: „Neue Untersuchungen über den Magnetismus“, Wied. Ann. 11. p. 394. 1880 gegeben. Derselbe sagt: „Mit sehr kleinen Kräften hat nur Riecke experimentirt, aber keine Resultate erhalten.“ Dass diese Bemerkung auf einem Irrthume beruht, ergibt sich aus dem Inhalte des vierten Abschnittes der vorliegenden Abhandlung.

des Principes der Superposition zu bewerkstelligen. In der That beruhen auf diesem Gedanken die von Beer und im Anschlusse an denselben von L. Weber¹⁾ gegebenen Lösungen. Man bestimmt zunächst diejenige magnetische Vertheilung, welche in dem Körper entsteht, wenn nur die gegebenen magnetisirenden Kräfte berücksichtigt werden. Nennt man die mit dieser Vertheilung äquivalente Oberflächenbelegung eine Belegung erster Ordnung, so kann man nun die Kräfte bestimmen, welche von derselben auf das Innere des Eisenkörpers ausgeübt werden. Aus der alleinigen Berücksichtigung dieser Kräfte ergibt sich eine zweite magnetische Vertheilung, sowie die mit ihr äquivalente Oberflächenbelegung zweiter Ordnung; die alleinige Berücksichtigung der von dieser herrührenden Kräfte führt zur Bestimmung einer Oberflächenbelegung dritter Ordnung u. s. f. Der schliessliche magnetische Zustand des Körpers wird durch Superposition der successive berechneten Vertheilungen erster, zweiter, dritter . . . Ordnung gefunden. Die beiden im Folgenden mitgetheilten Anwendungen des Principes der Superposition unterscheiden sich von den zuvor erwähnten dadurch, dass der gegebene Körper in Volumenelemente von besonderer Gestalt zerlegt wird. Mit Hülfe dieser Zerlegung ergibt sich dann ein sehr anschaulicher Process, durch welchen die äquivalente Oberflächenbelegung ganz unmittelbar erzeugt werden kann.

Erste Lösung. Das Potential der gegebenen magnetisirenden Kräfte sei F . Wir construiren die Kraftlinien, welche diesem Potentiale entsprechend das Innere des Eisenkörpers durchsetzen. (Fig. 1). Grenzen wir an irgend einer Stelle der Oberfläche des Körpers ein kleines Element $d\sigma_1$ ab, so werden die von dem Rande desselben entspringenden Kraftlinien einen engen Canal bilden, welcher das Element $d\sigma_1$ verbindet mit einem gegenüberliegenden Elemente der Oberfläche $d\sigma_2$. Wir construiren die Axe dieses Canals und bezeichnen den Abstand irgend eines Punktes derselben von ihrem in dem Element $d\sigma_1$ liegenden Anfangspunkt durch

1) L. Weber, Zur Theorie der magnetischen Induction. Kiel 1877.

l, da
magn

Fläch



demsel
ab, d
selber
erste
die n
dimer
zu de
ausset
magn

wo d
Länge
Magn
Const
sprich
magne
die M
Anfan
G
Weise

l , dann ist die an irgend einer Stelle des Canals wirkende magnetisirende Kraft gegeben durch:

$$-\frac{\partial F}{\partial l}.$$

Indem wir den Canal durch zwei aufeinanderfolgende Flächen gleichen Potentials durchschneiden, grenzen wir in

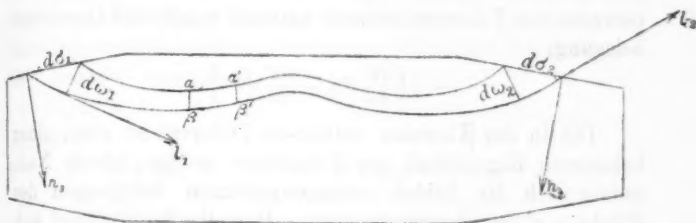


Fig. 1.

demselben ein Volumenelement $\alpha\beta\alpha'\beta'$ von solcher Grösse ab, dass die magnetisirende Kraft im ganzen Inneren desselben als constant betrachtet werden kann. Die für unsere erste Lösung wesentliche Annahme besteht nun darin, dass die nach der Richtung der Kraftlinien zu nehmende Längendimension des Elementes äusserst gross sei im Verhältniss zu den Dimensionen des Querschnitts. Unter dieser Voraussetzung ist dann das in dem Volumenelement inducirte magnetische Moment gegeben durch:

$$-k \frac{\partial F}{\partial l} dl d\omega,$$

wo $d\omega$ den mittleren Querschnitt des Elementes, dl seine Länge bezeichnet. k ist die von F. Neumann eingeführte Magnetisirungsfunktion, welche jedoch im Folgenden als eine Constante betrachtet werden soll. Diesem Momente entspricht eine Belegung der Endflächen des Elementes mit magnetischer Masse, und zwar kommt auf die Endfläche $\alpha\beta$ die Menge $-k(\partial F/\partial l)d\omega$ von positivem Fluidum, auf die Anfangsfläche $\alpha'\beta'$ die Menge $k(\partial F/\partial l)d\omega$ von negativem.

Gehen wir über zu einem benachbarten in derselben Weise aus dem Canal herausgeschnittenen Volumenelement

$\alpha'\beta'\alpha''\beta'' = dl' d\omega'$, so ist das in diesem inducirte magnetische Moment gleich:

$$-k \frac{\partial F}{\partial l'} dl' d\omega'.$$

Die Belegung der Endfläche gleich $-k(\partial F/\partial l') d\omega'$, die Belegung der Anfangsfläche $\alpha'\beta'$ gleich $k(\partial F/\partial l') d\omega'$. Auf dieser letzteren Fläche, als der gemeinsamen Endfläche der beiden betrachteten Volumenelemente entsteht somit eine Gesamtbelegung:

$$-k \left\{ \frac{\partial F}{\partial l} d\omega - \frac{\partial F}{\partial l'} d\omega' \right\}.$$

Die in der Klammer enthaltene Differenz ist aber, einer bekannten Eigenschaft des Potentials zufolge, gleich Null, sodass sich die beiden entgegengesetzten Belegungen der Fläche $\alpha'\beta'$ gegenseitig zerstören. Derselbe Schluss wird sich aber bei je zwei weiteren aufeinander folgenden Volumenelementen, welche in der angegebenen Weise aus dem betrachteten Canal herausgeschnitten werden, wiederholen, und daraus ergibt sich, dass der ganze, in jenem Canal erzeugte Magnetismus sich ersetzen lässt durch eine Belegung des Endquerschnittes $d\omega_2$ mit der nordmagnetischen Masse $-k(\partial F/\partial l_2) d\omega_2$, und eine Belegung des Anfangsquerschnittes $d\omega_1$ mit der süd magnetischen Masse $k(\partial F/\partial l_1) d\omega_1$.

Da nun nach dem Vorhergehenden:

$$k \frac{\partial F}{\partial l_1} d\omega_1 = k \frac{\partial F}{\partial l_2} d\omega_2 = k \frac{\partial F}{\partial l} d\omega,$$

so ergibt sich für die Wirkung des Potentials F auf die in dem betrachteten Canal enthaltene Eisenmasse die folgende Interpretation:

Verstehen wir unter $d\omega$ irgend einen Querschnitt des Canals, unter l die mit der Richtung einer Kraftlinie zusammenfallende Axe desselben, so wird durch das Potential F eine Strömung magnetischen Fluidums in der Richtung der Axe veranlasst, und zwar ist die Menge nordmagnetischen Fluidums, welche infolge dieser Strömung von dem Anfangsquerschnitte zu dem Endquerschnitte übergeht, gegeben durch:

$$-k \frac{\partial F}{\partial l} d\omega.$$

In Wirklichkeit wird nun unser Canal nicht begrenzt durch die Querschnitte $d\omega_1$ und $d\omega_2$, sondern durch die Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der Oberfläche des Eisenkörpers; es erscheint daher zweckmässiger, das Element $d\sigma_1$ zum Ausgangspunkt der betrachteten Strömung zu machen, das Element $d\sigma_2$ zu ihrem Endpunkt. Thut man dies, so ergibt sich unmittelbar ein Ausdruck für die in diesen Elementen durch die Strömung erzeugte Oberflächendichtigkeit. Es ist nämlich, wenn n_1 und n_2 die inneren Normalen der Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ bezeichnen:

$$d\omega_1 = d\sigma_1 \cos(n_1, l_1), \quad d\omega_2 = -d\sigma_2 \cos(n_2, l_2),$$

somit:

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} d\omega_1 = \frac{\partial F}{\partial l_1} \cos(n_1, l_1) d\sigma_1 = \frac{\partial F}{\partial n_1} d\sigma_1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial l_2} d\omega_2 = -\frac{\partial F}{\partial l_2} \cos(n_2, l_2) d\sigma_2 = -\frac{\partial F}{\partial n_2} d\sigma_2,$$

$$-k \frac{\partial F}{\partial l} d\omega = k \frac{\partial F}{\partial n_2} d\sigma_2, \quad k \frac{\partial F}{\partial l} d\omega = k \frac{\partial F}{\partial n_1} d\sigma_1.$$

Die infolge der Strömung auf dem Elemente $d\sigma_2$ sich niederschlagende Menge nördlichen Fluidums ist somit gegeben durch:

$$k \frac{\partial F}{\partial n_2} d\sigma_2,$$

die in dem Elemente $d\sigma_1$ zurückbleibende Menge südlichen Fluidums ist gleich:

$$k \frac{\partial F}{\partial n_1} d\sigma_1.$$

Es entsteht somit infolge der Strömung in den Endflächen des Canals eine Belegung der Oberfläche, deren Dichtigkeit in jedem Falle gegeben ist durch:

$$k \frac{\partial F}{\partial n_i},$$

wo n_i die innere Normale des Oberflächenelementes $d\sigma$.

Für den durch die alleinige Wirkung des Potentials F in dem ganzen Eisenkörper hervorgerufenen magnetischen Zustand ergibt sich hieraus der Satz:

Zerlegen wir den gegebenen Körper in lauter unendlich dünne Röhren, deren Axen Kraftlinien des Potentials F sind, so kann die Oberflächen-

belegung erster Ordnung erzeugt werden durch eine Strömung des positiven magnetischen Fluidums in der Richtung der Kraftlinien. In jeder Röhre ist die Menge nördlichen Fluidums, welche durch jene Strömung von dem Anfange derselben zu ihrem Ende geführt wird, gleich:

$$-k \frac{\partial F}{\partial l} d\omega.$$

Die hierdurch erzeugte Oberflächendichtigkeit erster Ordnung ist gleich:

$$k \frac{\partial F}{\partial n_i}.$$

Hier bezeichnet $d\omega$ einen Querschnitt von irgend einer jener Röhren, l das zwischen demselben und ihrem Anfange liegende Stück der Axe, k die Magnetisirungsfunktion von F. Neumann, n_i die innere Normale eines Oberflächenelementes $d\sigma$.

Um zu der Oberflächenbelegung zweiter Ordnung zu gelangen, haben wir zunächst das von der Belegung erster Ordnung ausgeübte Potential zu bestimmen. Ist T_i die reciproke Entfernung eines Oberflächenelementes $d\sigma$ von einem im Inneren des Eisenkörpers gelegenen Punkte, so ergibt sich für dieses Potential der Werth:

$$F_1 = k \int T_i \frac{\partial F}{\partial n_i} d\sigma.$$

Wenden wir auf dieses den vorhergehenden Satz an, so erhalten wir für die Oberflächendichtigkeit zweiter Ordnung den Werth:

$$k \frac{\partial F_1}{\partial n_i},$$

und daher wird das von der Oberflächenbelegung zweiter Ordnung ausgeübte Potential:

$$F_2 = k \int T_i \frac{\partial F_1}{\partial n_i} d\sigma.$$

Die wiederholte Anwendung derselben Betrachtungen liefert die weiteren Formeln:

$$F_3 = k \int T_i \frac{\partial F_2}{\partial n_i} d\sigma, \quad F_4 = k \int T_i \frac{\partial F_3}{\partial n_i} d\sigma.$$

.....

Durch Addition derselben ergibt sich:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots = k \int T_i \frac{\partial (F + F_1 + F_2 + \dots)}{\partial n_i} d\sigma.$$

Setzen wir:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots = Q_i,$$

so ist:

$$Q_i = k \int T_i \frac{\partial (F + Q)}{\partial n_i} d\sigma,$$

also Q_i das inducirte Potential. Die an irgend einer Stelle x, y, z des Eisenkörpers in der Volumeneinheit inducirten magnetischen Momente α, β, γ ergeben sich mit Hülfe der Formeln:

$$\alpha = -k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial x}, \quad \beta = -k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial y}, \quad \gamma = -k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial z},$$

d. h. durch Superposition der successive inducirten Momente erster, zweiter, dritter . . . Ordnung.

Die Anwendbarkeit der im Vorhergehenden entwickelten Methode ist natürlich gebunden an die Convergenz der Reihe:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

welche, wie man leicht sieht, nach steigenden Potenzen von k fortschreitet; da k im allgemeinen weit grösser als 1 ist, so kann diese Convergenz nur dadurch herbeigeführt werden, dass der von der Gestalt des Eisenkörpers abhängende Factor der Functionen $F_1, F_2, F_3 \dots$ in vorwiegendem Maasse der Null sich nähert. Wenn wir aber die Convergenz der Reihe $F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ voraussetzen, so lässt sich dieselbe mittelst der folgenden Betrachtung in die von Carl Neumann¹⁾ gegebene Entwickelung transformiren.

Die von C. Neumann gegebene Lösung des Problems der magnetischen Induction beruht auf Folgendem. Er leitet zunächst aus dem Potential F der gegebenen magnetisirenden Kraft eine Reihe von neuen Functionen ab durch den Process:

$$F'_i = \frac{1}{4\pi} \int F \frac{\partial T_i}{\partial n_i} d\sigma, \quad F''_i = \frac{1}{4\pi} \int F' \frac{\partial T_i}{\partial n_i} d\sigma,$$

Dann ergibt sich für das inducirte Potential Q_i der Ausdruck:

1) C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. p. 248.

$$Q_i = \frac{1}{1 + 4\pi k} \left\{ F_i + \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} F_i' + \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^2 F_i'' + \dots \right\} - F_i.$$

Zwischen den von uns eingeführten Functionen $F_1, F_2, F_3 \dots$ und den Functionen $F', F'', F''' \dots$ bestehen die Beziehungen:

$$F_i' = F + \frac{1}{4\pi k} \cdot F_1, \quad F_i'' = F + \frac{2}{4\pi k} F_1 + \frac{1}{(4\pi k)^2} F_2,$$

$$F_i''' = F + \frac{3}{4\pi k} F_1 + \frac{3}{(4\pi k)^2} F_2 + \frac{1}{(4\pi k)^3} F_3.$$

Allgemein:

$$F_i^{(n)} = F + \binom{n}{1} \frac{F_1}{4\pi k} + \binom{n}{2} \frac{F_2}{(4\pi k)^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{F_n}{(4\pi k)^n},$$

und daher:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^n F_i^{(n)} &= \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^n F + \binom{n}{1} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^n \frac{F_1}{4\pi k} \\ &+ \binom{n}{2} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^n \frac{F_2}{(4\pi k)^2} + \dots \\ &+ \binom{n}{n} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^n \frac{F_n}{(4\pi k)^n}. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass die Glieder der Reihe $F_1 + F_2 + \dots$ so stark gegen Null convergiren, dass wir dieselbe mit dem Gliede F_n abbrechen können, so werden die folgenden Gleichungen die abweichende Form annehmen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} F_i^{(n+m)} &= \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} F \\ &+ \binom{n+m}{1} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} \frac{F_1}{4\pi k} + \binom{n+m}{2} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} \frac{F_2}{(4\pi k)^2} \\ &+ \dots + \binom{n+m}{n} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} \frac{F_n}{(4\pi k)^n}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich durch Addition:

$$\begin{aligned} &\sum_0^{n+m} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} F_i^{(n+m)} = \\ &F \sum \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} + \frac{F_1}{4\pi k} \sum \binom{n+m}{1} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} \\ &+ \frac{F_2}{(4\pi k)^2} \sum \binom{n+m}{2} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m} + \dots \\ &+ \frac{F_n}{(4\pi k)^n} \sum \binom{n+m}{n} \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^{n+m}, \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Summen entwickeln:

$$\sum_0^{n+m} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right)^{n+m} F_i^{(n+m)} =$$

$$F \left\{ 1 + \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right) + \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right)^2 + \dots \right\}$$

$$+ \frac{F_1}{1+4\pi k} \left\{ 1 + \binom{2}{1} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right) + \binom{3}{2} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right)^2 + \dots \right\}$$

$$+ \frac{F_2}{(1+4\pi k)^2} \left\{ 1 + \binom{3}{1} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right) + \binom{4}{2} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right)^2 + \dots \right\}$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{F_n}{(1+4\pi k)^n} \left\{ 1 + \binom{n+1}{1} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right) + \binom{n+2}{2} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right)^2 + \dots \right\},$$

und hieraus:

$$\sum_0^{\infty} \left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \right)^{n+m} F_i^{(n+m)} = (1+4\pi k) (F + F_1 + F_2 + F_3 + \dots),$$

es ergibt sich somit, dass die Reihe $F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ identisch ist mit dem aus der Neumann'schen Theorie sich ergebenden Werthe von Q_i ; gleichzeitig ergibt sich, dass die Reihe $F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, wenn sie überhaupt convergirt, stärker convergirt, als die Neumann'sche Entwicklung.

Zweite Lösung, welche eine unter allen Umständen convergirende Entwicklung liefert.

Der geometrische Apparat, dessen wir uns bei der Lösung bedienen, bleibt im ganzen derselbe, wie bei der vorhergehenden Untersuchung. Wir zerlegen wieder den Eisenkörper in ein System dünner Röhren, deren Wände durch Kraftlinien des Potentials F gebildet werden. Dagegen werden wir mit Bezug auf die Gestalt des Volumenelementes $\alpha \beta \alpha' \beta'$, welches durch zwei aufeinander folgende Potentialflächen aus irgend einer jener Röhren herausgeschnitten wird, eine völlig andere Annahme eintreten lassen. Wir setzen nämlich fest, dass dieses Volumenelement gegen-

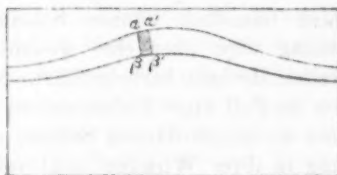


Fig. 2.

wärtig die Gestalt einer äusserst dünnen Scheibe besitze. (Fig. 2). Bezeichnen wir wieder durch F das Potential der gegebenen Kräfte, so ist das durch diese allein in dem Elemente inducirte magnetische Moment:

$$\mu_1(\alpha\beta\alpha'\beta') = -\frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial F}{\partial l} dl d\omega.$$

Die entsprechende Belegung der äusseren Oberfläche mit magnetischer Masse ergibt sich aus diesem Werth des in dem Volumenelement inducirten Momentes durch den Process, welchen wir bei der vorhergehenden Untersuchung ausführlich besprochen haben. Nur ist die Menge des in dem betrachteten Canal in Strömung versetzten nordmagnetischen Fluidums gegenwärtig gegeben durch den Ausdruck:

$$-\frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial F}{\partial l} d\omega,$$

und die durch diese Strömung erzeugte Oberflächendichtig-

keit:

$$\varepsilon_1 = \frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial F}{\partial n_i}.$$

Durch die vorhergehenden Ausdrücke ist diejenige magnetische Vertheilung bestimmt, welche wir im Vorhergehenden die Vertheilung erster Ordnung genannt haben. Wir erhalten die Vertheilung zweiter Ordnung, wenn wir die Kräfte bestimmen, welche von der Vertheilung erster Ordnung auf ein im Inneren des Eisenkörpers abgegrenztes Volumenelement ausgeübt werden, und darnach das magnetische Moment bestimmen, welches in diesem inducirt wird; dabei werden wir wiederum festsetzen, dass die Gestalt des Volumenelementes die einer nach der Richtung der Kraftlinien unendlich dünnen Scheibe sei. Durch diese Festsetzung wird aber eine wesentliche Complication unserer zweiten Methode herbeigeführt. Man bemerkt nämlich leicht, dass im Fall eines Volumenelementes $\alpha\beta\alpha'\beta'$ von der Form einer unendlich dünnen Scheibe die Vertheilung erster Ordnung in ihrer Wirkung nicht vollständig ersetzt wird durch die Belegung der äusseren Oberfläche des Eisenkörpers. Denkt man sich das Element $\alpha\beta\alpha'\beta'$ aus dem letzteren herausgeschnitten, so wird auf den gegenüberstehenden Flächen des dadurch gebildeten Hohlraumes eine Belegung ent-

stehen, und es wird durch dieselbe auf das Innere des Hohlraumes eine Kraft ausgeübt werden, welche für die Berechnung des inducirten Magnetismus zweiter Ordnung von wesentlicher Bedeutung ist. Diese innere Belegung des Hohlraumes $\alpha\beta\alpha'\beta'$ wird somit als ein integrierender Bestandtheil der Belegung erster Ordnung zu betrachten sein. Für die Dichtigkeiten dieser inneren Oberflächenbelegung ergeben sich die Werthe:

$$\text{auf der Fläche } \alpha\beta \quad \eta_1(\alpha\beta) = -\frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial F}{\partial l},$$

$$\text{auf der Fläche } \alpha'\beta' \quad \eta_1(\alpha'\beta') = \frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Was nun die von diesen Belegungen erster Ordnung ausgeübten Kräfte anbelangt, so ergibt sich für das Potential der auf der äusseren Oberfläche gefundenen Belegung der Werth:

$$\Phi_1 = \frac{k}{1+4\pi k} \int T_i \frac{\partial F}{\partial n_i} d\sigma.$$

Aus den auf $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ befindlichen Belegungen ergibt sich für das Innere des Elementes $\alpha\beta\alpha'\beta'$ eine Kraft:

$$R_1(\alpha\beta\alpha'\beta') = -\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Wollen wir den inducirten Magnetismus zweiter Ordnung bestimmen, so müssen wir beachten, dass die Kraftlinien des Potentials Φ_1 mit denen des Potentials F nicht zusammenfallen. Es wird daher nothwendig, zwischen der Wirkung des Potentials Φ_1 und der Wirkung der Kräfte R_1 zu trennen. Wir können das Potential Φ_1 gerade so behandeln, als ob dasselbe irgend welchen äusseren Kräften entspräche, welche zu den inneren Kräften R_1 unabhängig von diesen noch hinzukämen. Construiren wir dann ein Volumenelement $\alpha_1\beta_1\alpha_1'\beta_1'$, welches mit Bezug auf das Potential Φ_1 dieselben Eigenschaften besitzt, wie das Element $\alpha\beta\alpha'\beta'$ mit Bezug auf F , so ergibt sich für das in demselben inducirte magnetische Moment der Werth:

$$\mu_2(\alpha_1\beta_1\alpha_1'\beta_1') = -\frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1} dl_1 d\omega_1.$$

Dagegen wird durch die Kraft R_1 in dem Volumenelement $\alpha\beta\alpha'\beta'$ ein magnetisches Moment:

$$\mu_2(\alpha\beta\alpha'\beta') = -\frac{4\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} \frac{\partial F}{\partial l} dl d\omega$$

inducirt. Die beiden so bestimmten unabhängig voneinander bestehenden Vertheilungen lassen sich ersetzen durch eine einzige Belegung der äusseren Oberfläche, deren Dichtigkeit gegeben ist durch:

$$\epsilon_2 = \frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_i} + \frac{4\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} \frac{\partial F}{\partial n_i}.$$

Zu der Wirkung dieser auf der äusseren Oberfläche des Eisenkörpers befindlichen Vertheilung kommen wieder hinzu die Wirkungen der inneren Belegungen auf den Flächen $\alpha_1\beta_1$, $\alpha'_1\beta'_1$ und $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$. Für die Dichtigkeiten derselben ergibt sich:

$$\text{Auf } \alpha_1\beta_1 \quad \eta_2(\alpha_1\beta_1) = -\frac{k}{1+4\pi k} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1},$$

$$\text{Auf } \alpha'_1\beta'_1 \quad \eta_2(\alpha'_1\beta'_1) = \frac{k}{1+4\pi k} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1},$$

$$\text{Auf } \alpha\beta \quad \eta_2(\alpha\beta) = -\frac{4\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial l},$$

$$\text{Auf } \alpha'\beta' \quad \eta_2(\alpha'\beta') = \frac{4\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Das Potential der Belegung ϵ_2 ist gegeben durch:

$$\Phi_2 = \frac{k}{1+4\pi k} \int T_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_i} d\sigma + \frac{4\pi k}{1+4\pi k} \Phi_1.$$

Die Belegungen auf $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha'_1\beta'_1$ üben auf das Element $\alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1$ eine Kraft aus, welche gegeben ist durch:

$$R_2(\alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1) = -\frac{4\pi k}{1+4\pi k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1}.$$

Die von den Belegungen auf $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ auf das Innere des Elementes $\alpha\beta\alpha'\beta'$ ausgeübte Kraft ist:

$$R_2(\alpha\beta\alpha'\beta') = -\left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Um die durch diese Kräfte hervorgerufene Vertheilung dritter Ordnung zu bestimmen, ist es nothwendig, zu den im Vorhergehenden betrachteten Volumenelementen noch ein drittes hinzuzunehmen, welches von zwei Potentialflächen

Φ_2 und den entsprechenden Kraftlinien begrenzt wird. Bezeichnen wir dieses Volumenelement durch $\alpha_2 \beta_2 \alpha'_2 \beta'_2$, so ergeben sich die Formeln:

$$\mu_3(\alpha_2 \beta_2 \alpha'_2 \beta'_2) = - \frac{k}{1 + 4\pi k} \frac{\partial \Phi_2}{\partial l_2} dl_2 d\omega_2,$$

$$\mu_3(\alpha_1 \beta_1 \alpha'_1 \beta'_1) = - \frac{4\pi k^2}{(1 + 4\pi k)^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1} dl_1 d\omega_1,$$

$$\mu_3(\alpha \beta \alpha' \beta') = - \frac{(4\pi k)^2 k}{(1 + 4\pi k)^3} \frac{\partial F}{\partial l} dl d\omega.$$

Diese drei Vertheilungen lassen sich wieder ersetzen durch eine einzige Vertheilung magnetischer Massen auf der äusseren Oberfläche des Eisenkörpers, deren Dichtigkeit gegeben ist durch:

$$\varepsilon_3 = \frac{k}{1 + 4\pi k} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_i} + \frac{4\pi k^2}{(1 + 4\pi k)^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_i} + \frac{(4\pi k)^2 k}{(1 + 4\pi k)^3} \frac{\partial F}{\partial n_i}.$$

Hierzu kommen noch die Belegungen im Inneren:

$$\eta_3(\alpha_2 \beta_2) = - \frac{k}{1 + 4\pi k} \frac{\partial \Phi_2}{\partial l_2}, \quad \eta_3(\alpha'_2 \beta'_2) = \frac{k}{1 + 4\pi k} \frac{\partial \Phi_2}{\partial l_2},$$

$$\eta_3(\alpha_1 \beta_1) = - \frac{4\pi k^2}{1 + 4\pi k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1}, \quad \eta_3(\alpha'_1 \beta'_1) = \frac{4\pi k^2}{1 + 4\pi k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1},$$

$$\eta_3(\alpha \beta) = - \frac{(4\pi k)^2 k}{(1 + 4\pi k)^3} \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \eta_3(\alpha' \beta') = \frac{(4\pi k)^2 k}{1 + 4\pi k} \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Für das durch die Belegung ε_3 ausgeübte Potential ergibt sich:

$$\Phi_3 = \frac{k}{1 + 4\pi k} \int T_i \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_i} d\sigma + \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \Phi_2.$$

Für die von den inneren Belegungen ausgeübten Kräfte:

$$R_3(\alpha_2 \beta_2 \alpha'_2 \beta'_2) = - \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \frac{\partial \Phi_2}{\partial l_2},$$

$$R_3(\alpha_1 \beta_1 \alpha'_1 \beta'_1) = - \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1},$$

$$R_3(\alpha \beta \alpha' \beta') = - \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^3 \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Ganz in derselben Weise ergibt sich ein viertes System von Formeln, durch welches die inducirte Vertheilung vierter Ordnung und die von derselben ausgeübten Wirkungen bestimmt werden.

$$\mu_4(\alpha_3\beta_3\alpha'_3\beta'_3) = -\frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial \Phi_3}{\partial l_3} dl_3 d\omega_3,$$

$$\mu_4(\alpha_2\beta_2\alpha'_2\beta'_2) = -\frac{4\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial l_2} dl_2 d\omega_2,$$

$$\mu_4(\alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1) = -\frac{(4\pi k)^2 k}{(1+4\pi k)^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1} dl_1 d\omega_1,$$

$$\mu_4(\alpha\beta\alpha'\beta') = -\frac{(4\pi k)^2 k}{(1+4\pi k)^4} \frac{\partial F}{\partial l} dl d\omega,$$

$$\Phi_i = \frac{k}{1+4\pi k} \int T_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} d\sigma + \frac{4\pi k}{1+4\pi k} \Phi_i,$$

$$R_4(\alpha_3\beta_3\alpha'_3\beta'_3) = -\left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right) \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial l_3},$$

$$R_4(\alpha_2\beta_2\alpha'_2\beta'_2) = -\left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial l_2},$$

$$R_4(\alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1) = -\left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^3 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1},$$

$$R_4(\alpha\beta\alpha'\beta') = -\left(\frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right)^4 \cdot \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Werden diese Entwicklungen weiter und weiter fortgesetzt, so ergibt sich schliesslich durch Addition der für die aufeinanderfolgenden Belegungen der äusseren Oberfläche aufgestellten Potentialformeln die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots \\ &= \frac{k}{1+4\pi k} \int T_i \frac{\partial}{\partial n_i} (F + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots) d\sigma \\ &+ \frac{4\pi k}{1+4\pi k} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots). \end{aligned}$$

Wenn, wie im Folgenden noch zu zeigen ist, die Functionen Φ gegen Null convergiren, so kann diese Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots = k \int T_i \frac{\partial}{\partial n_i} (F + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots) d\sigma.$$

Die Summe der Potentiale der aufeinanderfolgenden Belegungen der äusseren Oberfläche, d. h. das Potential:

$$Q_i = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$$

der durch die Superposition derselben entstehenden Belegung der äusseren Oberfläche genügt also in der That der Gleichung:

$$Q_i = k \int T_i \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial n_i} d\sigma,$$

welche durch die Poisson'sche Theorie gefordert wird.

Für das in einem Volumenelement $\alpha\beta\alpha'\beta'$ inducirte Gesamtmoment, dasselbe reducirt auf die Einheit des Volumens, ergibt sich durch Addition der inducirten Momente erster, zweiter, dritter . . . Ordnung der Werth:

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots}{dl d\omega} (\alpha\beta\alpha'\beta') =$$

$$- \frac{k}{1 + 4\pi k} \left\{ 1 + \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} + \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^2 + \dots \right\} \frac{\partial F}{\partial l} = -k \frac{\partial F}{\partial l}.$$

Die Componenten dieses Momentes nach den Richtungen der Coordinatenachsen besitzen die Werthe:

$$-k \frac{\partial F}{\partial x}, \quad -k \frac{\partial F}{\partial y}, \quad -k \frac{\partial F}{\partial z},$$

wo x, y, z die Coordinaten derjenigen Stelle im Inneren des Eisenkörpers bezeichnen, für welche das Moment berechnet werden soll.

Ebenso ergibt sich das Gesamtmoment, welches in einem Volumenelement $\alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1$ inducirt wird, durch Addition der für die Momente zweiter, dritter . . . Ordnung aufgestellten Formeln. Wir erhalten, indem wir wieder durch das Volumen des Elementes dividiren:

$$\frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \dots}{dl_1 d\omega_1} (\alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1) = -k \frac{\partial \Phi_1}{\partial l_1},$$

und für die Componenten des Momentes nach der Richtung der Coordinatenachsen:

$$-k \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad -k \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad -k \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}.$$

Die Componenten des in einem Volumenelemente $\alpha_2\beta_2\alpha'_2\beta'_2$ inducirten Gesamtmomentes, reducirt auf die Einheit des Volumens, werden bestimmt durch die Ausdrücke:

$$-k \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \quad -k \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad -k \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ u. s. f.}$$

Nun entsteht aber der ganze in dem Eisenkörper inducirte Magnetismus durch Superposition der in den Elementen

$\alpha\beta\alpha'\beta', \alpha_1\beta_1\alpha_1'\beta_1' \dots$ inducirten Momente. Bezeichnen wir also durch A, B, Γ die an irgend einer Stelle x, y, z des Eisenkörpers in der Volumeneinheit inducirten Momente, genommen nach den Richtungen der Coordinatenachsen, so ergeben sich die Formeln:

$$A = -k \frac{\partial}{\partial x} \{F + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots\},$$

oder:
$$A = -k \frac{\partial (F + Q_1)}{\partial x}.$$

Ebenso:
$$B = -k \frac{\partial (F + Q_1)}{\partial y}, \quad \Gamma = -k \frac{\partial (F + Q_1)}{\partial z}$$

in vollkommener Uebereinstimmung mit der Poisson'schen Theorie.

Die im Vorhergehenden berechneten Oberflächenpotentiale $\Phi_1, \Phi_2 \dots$ stehen in sehr einfacher Beziehung zu den von C. Neumann eingeführten Functionen $F, F'' \dots$. Setzen wir:

$$\kappa = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k},$$

so ergibt sich:

$$\Phi_1 = \kappa \cdot \frac{1}{4\pi} \int T_i \frac{\partial F}{\partial n_i} d\sigma,$$

oder mit Hülfe der von C. Neumann gegebenen Formeln:

$$\Phi_1 = \kappa (F'_i - F_i).$$

Ferner wird:

$$\Phi_2 = \kappa \cdot \frac{1}{4\pi} \int T_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_i} d\sigma + \kappa \Phi_1, \quad \Phi_2 = \kappa^2 (F''_i - F'_i).$$

Ebenso:

$$\Phi_3 = \kappa^3 (F'''_i - F''_i).$$

Da nun die Functionen $F, F'_i, F''_i, F'''_i \dots$ gegen eine Constante convergiren, so convergiren die Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \dots$ gegen Null. Ferner ergibt sich aus den gefundenen Beziehungen, dass der von C. Neumann für das inducirte Potential gegebene Ausdruck:

$$Q_i = (1 - \kappa) \{F_i + \kappa F'_i + \kappa^2 F''_i + \dots\} - F_i$$

mit dem Ausdruck:

$$Q_i = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$$

identisch ist.

II. Anwendung der entwickelten Methoden auf Körper von specieller Gestalt bei constanter magnetisirender Kraft.

1. Der Körper hat die Gestalt eines Ellipsoides. Das Potential der gegebenen magnetisirenden Kräfte sei:

$$F = -Ax - By - Cz.$$

Halten wir uns an die erste der im Vorhergehenden entwickelten Methoden, so wird:

$$F_1 = k \int T_i \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn_i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn_i} \right\} d\sigma$$

$$= -k \int T_i \{ A \cos(x, n_i) + B \cos(y, n_i) + C \cos(z, n_i) \} d\sigma,$$

oder nach einem bekannten Satze, wenn durch M, N, P die in der Anziehung eines homogenen Ellipsoides auftretenden Constanten bezeichnet werden:

$$F_1 = k(MAx + NBy + PCz).$$

Ebenso:

$$F_2 = k^2 \int T_i \{ MA \cos(x, n_i) + NB \cos(y, n_i) + PC \cos(z, n_i) \} d\sigma$$

$$= -k^2(M^2Ax + N^2By + P^2Cz),$$

$$F_3 = k^3(M^3Ax + N^3By + P^3Cz)$$

Somit:

$$Q_i = kMAx \{ 1 - kM + k^2M^2 - + \dots \}$$

$$+ kNBy \{ 1 - kN + k^2N^2 - + \dots \}$$

$$+ kPCz \{ 1 - kP + k^2P^2 - + \dots \},$$

die in den Klammern enthaltenen Reihen convergiren nur, wenn:

$$kM < 1, kN < 1, kP < 1.$$

Sind diese Bedingungen nicht gleichzeitig zu erfüllen, ist also z. B. zwar $kP < 1$, dagegen kM und $kN > 1$, so behält die für Q_i gegebene Entwicklung einen bestimmten Werth nur dann, wenn gleichzeitig A und B verschwinden. Ist dies der Fall, so ergibt sich:

$$Q_i = \frac{kPCz}{1+kP}, \quad F_i + Q_i = -\frac{Cz}{1+kP}.$$

In der That also bestätigt sich die im vorhergehenden Abschnitt ausgesprochene Vermuthung, dass die Anwendbarkeit der ersten Methode auf specielle Fälle beschränkt ist.

Für die bei Zugrundelegung der zweiten Methode zu berechnenden Functionen ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{k}{1+4\pi k} \{MAx + NBy + PCz\}, \\ \Phi_2 &= \frac{k}{1+4\pi k} \left\{ \frac{4\pi - M \cdot k}{1+4\pi k} MAx + \frac{4\pi - N \cdot k}{1+4\pi k} NBy \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi - P \cdot k}{1+4\pi k} PCz \right\}, \\ \Phi_3 &= \frac{k}{1+4\pi k} \left\{ \left(\frac{4\pi - M \cdot k}{1+4\pi k} \right)^2 MAx + \left(\frac{4\pi - N \cdot k}{1+4\pi k} \right)^2 NBy \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{4\pi - P \cdot k}{1+4\pi k} \right)^2 PCz \right\}\end{aligned}$$

Woraus:

$$\begin{aligned}Q_i &= \frac{kMAx}{1+kM} + \frac{kNBy}{1+kN} + \frac{kPCz}{1+kP}, \\ Q_i + F_i &= -\frac{Ax}{1+kM} - \frac{By}{1+kN} - \frac{Cz}{1+kP}, \\ A &= \frac{kA}{1+kM}, \quad B = \frac{kB}{1+kN}, \quad \Gamma = \frac{kC}{1+kP}.\end{aligned}$$

2. Der Körper hat die Form eines Cylinders mit Geradendflächen. Die constante magnetisierende Kraft ist der Cylinderaxe parallel gerichtet. Die Untersuchung eines Körpers von der angegebenen Gestalt besitzt ein besonderes Interesse deshalb, weil bei der Construction von Magnetometern und Galvanometern vorzugsweise cylindrische Magnete von rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt zur Anwendung kommen. Vielleicht liegt in den vorhergehenden Betrachtungen ein Mittel, das Problem der magnetischen Induction für einen solchen Körper etwas weiter zu verfolgen, als dies seither geschehen ist. Nehmen wir die x -Axe des Coordinatensystems parallel der Axe des Cylinders, so ist:

$$F = -Ax.$$

Die Oberflächenbelegung erster Ordnung reducirt sich für die äussere Oberfläche auf eine Belegung der Geradendflächen. Bezeichnen wir als Anfangsfläche des Cylinders diejenige, durch welche die Kraftlinien in denselben eintreten, als Endfläche diejenige, durch welche sie ihn ver-

lassen, so ergibt sich bei Zugrundelegung unserer zweiten Methode für die Anfangsfläche die Dichtigkeit der Belegung:

$$\epsilon_1 = -\frac{k}{1 + 4\pi k} A,$$

für die Endfläche: $\epsilon_1' = \frac{k}{1 + 4\pi k} A.$

Das von dieser ersten Belegung der äusseren Oberfläche ausgeübte Potential kann zerlegt werden in zwei Theile, von welchen der erste Φ_1 herrührt von der Anfangsfläche, der zweite Φ_1' von der Endfläche. Im Falle eines kreisförmigen Querschnittes des Cylinders sind Φ_1 und Φ_1' die Potentiale von homogen mit Masse belegten Kreisscheiben und können nach H. Weber dargestellt werden in der Form:

$$\Phi_1 = -\frac{k}{1 + 4\pi k} A \int_0^{\infty} e^{\pm \frac{1}{2} z} J'(r_1 \xi) \cdot J^0(r \xi) \frac{d\xi}{\xi},$$

$$\Phi_1' = \frac{k}{1 + 4\pi k} A \int_0^{\infty} e^{\pm \frac{1}{2} z} J'(r_1 \xi) \cdot J^0(r \xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Hier ist r_1 der Halbmesser des cylindrischen Querschnitts; r und z sind Cylinderkoordinaten irgend eines Punktes mit Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt beziehungsweise im Mittelpunkt der Anfangsfläche oder der Endfläche des Cylinders gelegen ist.

Zu der Wirkung dieser Potentiale kommt noch hinzu die Wirkung der inneren Kräfte R_1 , welche den Kraftlinien des gegebenen Potentials F gleich gerichtet sind, und deren Stärke gegeben ist durch:

$$R_1 = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} A.$$

Bei der Herstellung der Oberflächenbelegung zweiter Ordnung machen wir wiederum Gebrauch von dem Princip der Superposition, und zwar insofern, als wir die Wirkung der Potentiale Φ_1' und Φ_1 getrennt untersuchen. Wir zerlegen zunächst die Endfläche des Cylinders in einzelne Elemente, deren Inhalt der Einfachheit halber gleich der Einheit des Flächeninhalts genommen werden möge. Jedes derselben machen wir zur Anfangsfläche eines in den Cylind-

der eindringenden Canals, dessen Mantellinien Kraftlinien des Potentials Φ_1' sind, und welcher auf der anderen Seite durch den Mantel oder durch die Anfangsfläche des Cylinders begrenzt wird. Durch jeden dieser Canäle strömt dann von der Endfläche des Cylinders hinweg die Menge:

$$-\frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial n_i} = \frac{2\pi k \varepsilon_1'}{1+4\pi k}$$

von nordmagnetischem Fluidum; die Dichtigkeit der auf der Endfläche befindlichen Belegung wird dadurch vermindert um den Betrag:

$$\frac{2\pi k \varepsilon_1'}{1+4\pi k} = \frac{2\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} A.$$

Andererseits wird durch die Wirkung der inneren Kräfte R_1 eine Belegung der Oberfläche erzeugt, deren Dichtigkeit für die Endfläche gleich ist:

$$\frac{4\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} A,$$

für die Anfangsfläche gleich:

$$-\frac{4\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} A.$$

Durch die gleichzeitige Wirkung des Potentials Φ_1' und der Kräfte R_1 wird also die Dichtigkeit der Belegung der Endfläche vermehrt um den Betrag:

$$\frac{2\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} A.$$

Bezeichnen wir die Fläche des Cylinderquerschnittes durch f , so wird gleichzeitig die Menge:

$$\frac{2\pi k^2}{(1+4\pi k)^2} A \cdot f$$

von nordmagnetischem Fluidum auf der Mantelfläche und der Anfangsfläche des Cylinders niedergeschlagen in einer Dichtigkeit, welche durch die Ausbreitung der dem Potential Φ_1' angehörigen Kraftlinien näher bestimmt wird. Die Dichtigkeit der dadurch entstehenden Belegungen ist gegeben durch:

$$\frac{k}{1+4\pi k} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial n_i},$$

wo n_i die innere Normale an irgend einer Stelle der Mantelfläche oder der Anfangsfläche des Cylinders bezeichnet.

Da nun ganz dieselben Betrachtungen auch auf das Potential Φ_1 der Anfangsfläche Anwendung finden, so ergibt sich für die gesammte magnetische Vertheilung, wie sie durch den ersten und zweiten Inductionsact hergestellt wird, das Resultat:

Auf den Geradenflächen des Cylinders wird eine Belegung mit nordmagnetischem, bezw. süd magnetischem Fluidum hervorgerufen, deren Dichtigkeit gegeben ist durch:

$$\frac{k}{1 + 4 \pi k} \left(1 + \frac{2 \pi k}{1 + 4 \pi k} \right) A.$$

Auf der Mantelfläche des Cylinders und seiner Anfangsfläche wird die Menge nordmagnetischen Fluidums:

$$\frac{2 \pi k^2}{(1 + 4 \pi k)^2} \cdot A f,$$

auf der Mantelfläche und der Endfläche eine ebenso grosse Menge süd magnetischen Fluidums ausgebreitet. Die Dichtigkeit der dadurch entstehenden Belegung ist für die Mantelfläche gegeben durch:

$$\frac{k}{1 + 4 \pi k} \cdot \frac{\partial (\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial n_i},$$

für die Anfangsfläche durch:

$$\frac{k}{1 + 4 \pi k} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_i},$$

für die Endfläche durch:

$$\frac{k}{1 + 4 \pi k} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_i}.$$

III. Ueber die experimentelle Prüfung der Poisson'schen Theorie.

Die Frage, welche Beobachtungen vorzugsweise zur Prüfung der Poisson'schen Theorie sich eignen, kann nicht wohl entschieden werden, ohne dass zuvor einige Resultate der theoretischen und experimentellen Forschung in Erinnerung gebracht werden. Die Gleichungen, von welchen das Problem des inducirten Magnetismus abhängt, sind gegenwärtig nur in solchen Fällen gelöst, in welchen die Magnetisirungsfunktion k als eine Constante betrachtet, bezw. durch einen constant bleibenden Mittelwerth ersetzt werden kann. Wir werden daher auch im Folgenden die Betrachtung be-

schränken auf solche Fälle, in welchen bei der Lösung der Poisson'schen Gleichung die Annahme eines constanten k zulässig ist. Unter dieser Voraussetzung wird das Potential des inducirten Magnetismus bestimmt durch die Gleichung:

$$Q_i = k \int T_i \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial n_i} \cdot d\sigma,$$

welche erfüllt bleibt, wenn alle linearen Dimensionen der rechten Seite und gleichzeitig die Potentiale Q_i und F in demselben Maassstabe vergrössert werden. Daraus ergibt sich der Satz: Werden ähnliche und ähnlich liegende Körper an entsprechenden Stellen magnetisirenden Kräften von gleicher Richtung und Stärke unterworfen, so sind die in der Volumeneinheit inducirten Momente gleich, die ganzen Momente dem Volumen proportional.

Ist ferner für einen Körper von beliebiger Gestalt aber von der Einheit des Volumens das Problem der magnetischen Induction gelöst, bei irgend einem Werth des inducirenden Potentials F , so bleibt die Gleichung:

$$Q_i = k \int T_i \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial n_i} d\sigma$$

erfüllt, wenn F und Q_i mit demselben Zahlenfactor multiplicirt werden. D. h. wenn k als constant betrachtet wird, ist das inducirte Potential dem inducirenden proportional und Gleiches gilt daher auch für die inducirten Momente in ihrem Verhältniss zu der inducirenden Kraft. Ergeben sich also für die Einheit der letzteren die Werthe α , β , γ der inducirten Momente, so werden einer inducirenden Kraft f die Momente $A = \alpha f$, $B = \beta f$, $\Gamma = \gamma f$ entsprechen. Hierbei sind die Grössen α , β , γ abhängig von k , von der Gestalt des Körpers und von der Richtung der magnetisirenden Kraft. Wenn aber die Functionen A , B , Γ den Poisson'schen Gleichungen genügen für den seither festgehaltenen Werth von k , so wird dies auch noch der Fall sein, wenn dieser Werth durch einen anderen ersetzt wird, wie er der neuen magnetisirenden Kraft entspricht. Die in einem Körper von der Einheit des Volumens durch eine constante Kraft inducirten Momente können somit dargestellt werden

durch das Product aus der magnetisirenden Kraft und gewissen Factoren, welche von der Gestalt des Körpers, der Richtung der Kraft und von der Magnetisirungsfunction k abhängig sind.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so ergibt sich, dass das in einem beliebigen Körper durch eine constante Kraft inducirte magnetische Moment G dargestellt werden kann durch einen Ausdruck von der Form:

$$G = \gamma \cdot v \cdot f,$$

wo f die magnetisirende Kraft, v das Volumen des Körpers bezeichnet. Der Factor γ ist gleich dem magnetischen Momente, welches in einem ähnlich gestalteten Körper von der Einheit des Volumens durch eine Kraft von gleicher Richtung und Grösse inducirt würde, dividirt durch diese Kraft. Es ist demnach γ im allgemeinen abhängig von der Gestalt des Körpers, der Richtung der magnetisirenden Kraft und der Magnetisirungsfunction k . Wir werden im Folgenden die Function γ , den Quotienten aus dem in der Volumeneinheit eines Körpers durch eine gegebene constante Kraft inducirten Moment und aus dieser Kraft selbst bezeichnen als die Magnetisirungsfunction des betrachteten Körpers. Wir werden also in diesem Sinne von der Magnetisirungsfunction der Kugel, des Ellipsoides, des Cylinders sprechen. Bei einem und demselben Körper ist die Magnetisirungsfunction γ abhängig von der Richtung und Stärke der magnetisirenden Kraft, im allgemeinen abhängig von den Gestaltsverhältnissen der Körper, sodass ähnliche Körper dieselbe Magnetisirungsfunction besitzen. Bezeichnen wir das in der Volumeneinheit eines Körpers inducirte Moment durch m , so ist:

$$\gamma = \frac{m}{f}.$$

Denken wir uns γ als Function von f bestimmt, so werden wir mit Hülfe der vorhergehenden Gleichung jede der drei Grössen γ , m , f durch eine der anderen auszudrücken im Stande sein. Wir können also auch die Magne-

tisirungsfuction γ darstellen als Function des in der Volumeneinheit inducirten Momentes m . Diese zuerst von Rowland benutzte Darstellung soll auch im Folgenden zur Anwendung gebracht werden.

Mit Bezug auf die im Vorhergehenden gegebene Definition der Magnetisirungsfuction eines beliebig gestalteten Körpers besteht die Bedeutung der Poisson'schen Theorie darin, dass sie einen Zusammenhang zwischen den Magnetisirungsfuctionen verschiedener Körper herstellt, sodass, wenn für irgend einen Körper die Magnetisirungsfuction auf experimentellem Wege ermittelt ist, die Magnetisirungsfuctionen aller übrigen Körper aus dieser einen ein für allemal bestimmten berechnet werden können. Die Prüfung der Theorie wird dann darin bestehen, dass man die für irgend einen Körper aus Beobachtungen bestimmte Magnetisirungsfuction vergleicht mit dem aus der Theorie berechneten Werthe derselben. Für diejenigen Fälle, auf welche die theoretische Betrachtung bisher ausgedehnt wurde, gestaltet sich die Rechnung in folgender Weise.

Bei einem geschlossenen Ringe, welcher der Wirkung constanter, gegen seine Querschnitte senkrecht gerichteter Kräfte unterworfen wird, kann den Poisson'schen Gleichungen genügt werden, wenn man $Q_i = 0$ setzt. Man erhält dann für das in der Volumeneinheit inducirte magnetische Moment:

$$m = k.f,$$

wenn f der constante Werth der magnetischen Kräfte ist. Es ergibt sich hieraus, dass die F. Neumann'sche Constante definiert werden kann als die Magnetisirungsfuction eines Ringes, welcher durch eine constante, seiner Axe parallelen Kraft magnetisirt wird. Ganz ebenso gestaltet sich aber auch die Lösung für einen unendlich langen Cylinder, welcher der Wirkung einer constanten, seiner Axe parallelen Kraft unterworfen wird. Die Function k kann also ebenso gut als Magnetisirungsfuction eines solchen Cylinders definiert werden. Aus dieser Magnetisirungsfuction k des unendlich langen Cylinders kann die Magnetisirungsfuction des Ellipsoids in folgender Weise abgeleitet werden. Im Innern des Cylinders schneiden wir ein Ellipsoid von der Einheit des

Volumens aus, dessen Axenrichtungen durch x, y, z bezeichnet werden mögen. Das gesammte in diesem Ellipsoid inducirte Moment ist dann $m = k.f$, und die Richtung desselben fällt mit der Richtung der auf den Cylinder wirkenden Kraft zusammen. Sind A, B, Γ die Componenten des Momentes m nach den Richtungen x, y, z , ferner a, b, c die Componenten von f nach denselben Richtungen, so ist:

$$A = k.a, \quad B = k.b, \quad \Gamma = k.c.$$

Auf das Innere des Ellipsoides wirkt die Kraft f , ausserdem aber die Belegung des Hohlraumes, welcher entsteht, wenn man sich das Ellipsoid aus dem Innern des Cylinders herausgenommen denkt. Für die Componenten der auf das Ellipsoid wirkenden magnetisirenden Kraft ergeben sich somit die Werthe:

$$A = a + MA, \quad B = b + NB, \quad C = c + P\Gamma.$$

Schreiben wir die Gleichung für die inducirten Momente in der Form:

$$A = \frac{k(a + MA)}{1 + kM},$$

so erhalten wir:

$$A = \frac{kA}{1 + kM}, \quad B = \frac{kB}{1 + kN}, \quad \Gamma = \frac{kC}{1 + kP},$$

und hieraus ergibt sich die Magnetisirungsfunktion des Ellipsoides mit Hülfe der Formel:

$$\frac{m}{F} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

In dem für die experimentelle Untersuchung besonders geeigneten Falle, in welchem die magnetisirende Kraft zusammenfällt mit einer der Axen des Ellipsoides, beispielsweise mit der z -Axe, ergibt sich für die Magnetisirungsfunktion der Werth:

$$\gamma = \frac{\Gamma}{C} = \frac{k}{1 + kP}.$$

Die von dem Axenverhältniss abhängende Constante P hat für den Fall der Kugel den Werth $\frac{4}{3}\pi$, in dem Fall einer unendlich grossen z -Axe, d. h. für den unendlich langen Cylinder den Werth Null, in dem Fall einer unendlich kleinen z -Axe, d. h. für eine unendlich dünne Scheibe den Werth 4π .

Die experimentellen Untersuchungen sind in der Mehrzahl gerichtet auf die Bestimmung der Magnetisirungsfunction k durch Beobachtung an Ringen oder gestreckten cylindrischen Stäben. Abgesehen von gewissen Abweichungen, welche für den vorliegenden Zweck ohne Bedeutung sind, kann nach diesen Untersuchungen die Function k in ihrer Abhängigkeit von dem in der Volumeneinheit inducirten Moment m dargestellt werden durch eine parabolische Curve mit geneigter Axe.¹⁾

Bestimmt wird dieselbe durch den Werth k_0 , welchen die Function für ein verschwindendes m besitzt, durch den Maximalwerth von k , den für $k = 0$ eintretenden Maximalwerth von m und endlich durch die Neigung des durch den höchsten Punkt der Parabel hindurchgehenden conjugirten Durchmessers. Die numerischen Werthe von k sind bei gleichem Werthe des Argumentes m für verschiedene Eisensorten ausserordentlich verschieden, sodass beispielsweise der Maximalwerth von k zwischen 80 und 400 schwankt. Daraus folgt, dass die verschiedenen Eisenstücken zugehörigen Magnetisirungsfunctionen k in der Zeichenebene einen breiten Streifen bedecken, derart, dass jede innerhalb dieses Streifens verlaufende parabolische Curve als ein möglicher Werth der Magnetisirungsfunction zu betrachten ist. Aus diesem Resultat ergibt sich nun eine gewisse Schwierigkeit für die Prüfung der Poisson'schen Theorie. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass für ein bestimmtes Ellipsoid die aus den Beobachtungen sich ergebende Function γ innerhalb des von den Functionen k bedeckten Flächenstreifens liegt. Wenn wir dann aus γ die entsprechenden Werthe von k berechnen, und die Function k liegt wieder innerhalb jenes Streifens, so wird dieses Resultat allerdings in Uebereinstimmung mit der Theorie sich befinden; ein unzweideutiger Beweis ihrer Richtigkeit wird aber nicht gewonnen sein, da die Beobachtungen eine wesentliche Verschiedenheit der Functionen k und γ überhaupt nicht erkennen liessen. Damit die Prüfung der Poisson'schen Theorie eine vollkom-

1) Vgl. die Figur in Wied. Galv. 2. p. 727.

men sichere ist, müssen demnach die Ellipsoide, deren Magnetisirungsfuction bestimmt werden soll, so gewählt werden, dass die Werthe von γ in keinem Fall in das Gebiet der Magnetisirungsfuction k hineinfallen. Inwieweit diese Bedingung erfüllt ist, wird in jedem speciellen Fall besonders geprüft werden können, wenn die Eigenschaften der Function k für die angewandte Eisensorte bekannt sind. Ganz allgemein ergibt sich Folgendes. Der Maximalwerth, welchen k für ein beliebiges Eisenellipsoid besitzen kann, ist 400; die Werthe von γ werden jedenfalls ausserhalb des von den Functionen k bedeckten Gebietes liegen, wenn wir festsetzen, dass der Maximalwerth von γ kleiner sein soll als der kleinste Werth, welchen k erreichen kann, d. h. kleiner als 80; es ergibt sich somit:

$$80 > \gamma = \frac{400}{1 + 400 \cdot P},$$

woraus

$$P > 0,01 \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} < 70,$$

vorausgesetzt, dass das Ellipsoid ein verlängertes Rotationsellipsoid mit den Hauptaxen c und a .

Es schliesst sich hieran noch die Frage, welche Dimensionen einem Ellipsoid zu geben sind, damit seine Magnetisirungsfuction γ mit k als übereinstimmend betrachtet werden kann. Allgemein ist:

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{k} + P}.$$

Setzen wir $k = 200$, so wird:

$$\gamma = \frac{1}{0,005 + P}.$$

Lassen wir zwischen den Werthen von γ und k eine Differenz von 2 Proc. zu, so muss:

$$P < 0,0001,$$

also

$$\frac{c}{a} > 900$$

sein. Für $k = 20$ wird derselbe Grad von Uebereinstimmung erreicht mit $c/a > 250$.

Die vorliegenden experimentellen Arbeiten können hiernach in drei Gruppen geschieden werden.

1. Versuche mit Ringen zur Bestimmung von k . (Die Versuche von Stoletow, Rowland und Bauer.)

2. Versuche mit Ellipsoiden zur Prüfung der Theorie. (Fromme's Bestimmung der Magnetisirungsfuction von Kugeln; die von Fromme und von mir mit Ellipsoiden ausgeführten Untersuchungen; Beobachtungen von A. L. Holz.)

3. Versuche mit Ellipsoiden oder Cylindern von gestreckter Form, welche zwar zu einer unzweideutigen Prüfung der Theorie nicht geeignet sind, dagegen, die Richtigkeit der letzteren vorausgesetzt, wohl brauchbar zur Berechnung der Magnetisirungsfuction k . (Versuche von Quintus Icilius und Oberbeck).

IV. Werthe der Magnetisirungsfunctionen γ und k für kleine magnetisirende Kräfte.

Für eine Reihe von verlängerten Rotationsellipsoiden habe ich im Jahre 1872 die Magnetisirungsfuction γ bestimmt, und zwar mit Anwendung der horizontalen und verticalen Componente des Erdmagnetismus als inducirender Kraft.

Die Resultate sämmtlicher ausgeführter Messungen sind im Folgenden zusammengestellt; es bezeichnen dabei γ_z die Magnetisirungsfuction für die horizontale, γ_v die Magnetisirungsfuction für die verticale Componente des Erdmagnetismus, γ_0 den Werth von γ für eine verschwindende magnetisirende Kraft, d. h. für $m = 0$. Die horizontale Intensität hatte zur Zeit der Beobachtungen den Werth 1,850, die verticale den Werth 4,290.

Ellipsoid	I	II	III	IV	V	VI	VII
Axenverhältniss	4:1	5:1	6:1	7:1	8:1	11:1	12,5:1
γ_z	1,014	1,326	1,676	2,045	2,888	3,557	4,274
	1,014	1,319	1,677	2,053	2,873	3,560	4,275
γ_v	1,018	1,344	1,728	2,106	2,923	3,685	4,450
	1,024	1,340	1,726	2,100	2,921	3,686	4,463
	1,020	1,339	1,720	2,095	2,924	3,664	4,429
	1,019	1,342	1,718	2,095	2,930	3,671	4,449
γ_z Mittel	1,014	1,322	1,677	2,049	2,880	3,559	4,275
γ_v Mittel	1,020	1,341	1,723	2,099	2,925	3,676	4,448
γ_0	1,009	1,308	1,643	2,016	2,855	3,474	4,162
α	0,0025	0,0057	0,0109	0,0088	0,0066	0,0128	0,0142

γ_0 ist berechnet mit Hülfe der Eormel:

$$\gamma = \gamma_0 + \alpha m,$$

wo m wie früher das in der Volumeneinheit inducirte Moment bezeichnet. Dass die Magnetisirungsfunktionen γ der verschiedenen Ellipsoide zunehmen mit wachsender magnetisirender Kraft, ergibt sich in unzweideutiger Weise aus der Betrachtung aller beobachteten Werthe. Da aber die Function k mit γ durch die Formel zusammenhängt:

$$k = \frac{\gamma}{1 - P\gamma},$$

so überträgt sich das Verhalten von γ in verstärktem Maasse auf k . Ich habe daher in meiner früheren Arbeit in Pogg. Ann. das Resultat derselben in den Worten ausgesprochen: „Dass dasselbe Verhalten der Function k (die anfängliche Zunahme mit wachsender magnetisirender Kraft) selbst bei hundertmal kleinerem Werth des Arguments stattfindet, dürfte das einzige allgemeine Resultat sein, welches wir aus den vorhergehenden Tabellen entnehmen können.“

In den angeführten Tabellen hatte ich die berechneten Werthe von k zusammengestellt. Was die für k gegebenen Zahlenwerthe anbelangt, so ergeben die einzelnen Bestimmungen bei den weniger gestreckten Ellipsoiden sehr abweichende Werthe, welche z. B. bei Ellipsoid I für k_0 zwischen 38 und 50 liegen. Auf den Grund dieser mangelhaften Uebereinstimmung bin ich in meiner früheren Arbeit nicht eingegangen, halte es aber jetzt für nothwendig, diesen Umstand einer etwas eingehenderen Betrachtung zu unterwerfen. Es wird dadurch einmal die Bedeutung der früher für k mitgetheilten Werthe sichergestellt werden, andererseits ergeben sich gewisse Bemerkungen, welche für die Prüfung der Theorie durch Versuche mit Ellipsoiden von allgemeiner Bedeutung sein dürften.

Zur Bestimmung von γ wurde ein Erdinductor verwandt, bestehend aus einer 547 mm langen Spirale, welche um eine horizontale und eine verticale Axe gedreht werden konnte. Es ergab sich γ aus der Vergleichung der Inductionsströme, welche vom Erdmagnetismus in der Spirale allein inducirt

wurden mit denjenigen, welche auftraten, wenn in dem Innern der Spirale das zu untersuchende Ellipsoid befestigt war. Zur Bestimmung von γ dient die Formel:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{n_\alpha - n_\beta}{n_\beta} \cdot \frac{F}{vS} \left\{ 1 - \frac{n_\alpha (n_\alpha + n_\beta)}{3 \cdot 10^7} \right\}.$$

Hier sind n_α und n_β die mit dem Ellipsoid und mit der Spirale allein an einem Galvanometer beobachteten Scalenausschläge; F ist die von den Windungen des Inductors umschlossene Fläche, v das Volumen des Ellipsoids, S eine aus dem Axenverhältniss und den Dimensionen der Spirale zu berechnende Constante. Es ergibt sich leicht, dass nur zwei Fehler in dem für γ gegebenen Ausdruck überhaupt von Bedeutung sein können. Nämlich einmal die Fehler der galvanometrisch gemessenen Ausschläge n_α und n_β , und zweitens der Fehler der Fläche F . Es leuchtet ein, dass diese beiden Fehler einen völlig verschiedenen Charakter besitzen; der Fehler an F wird je nach seiner Richtung sämmtliche γ in gleichem Maasse vergrössern oder verkleinern, ihr Verhältniss ganz ungeändert lassen; der Fehler an den galvanometrisch gemessenen Grössen dagegen wird ganz unregelmässig auftreten. Mit Bezug hierauf erscheint es zweckmässig, den Einfluss beider Fehler getrennt zu untersuchen.

Bezeichnen wir durch δn_α und δn_β den an n_α und n_β auftretenden Fehler, so ergibt sich für den aus Galvanometermessungen entspringenden Fehler der Ausdruck:

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{n_\alpha}{n_\alpha - n_\beta} \left(\frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha} + \frac{\delta n_\beta}{n_\beta} \right),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$N = \frac{n_\alpha - n_\beta}{n_\beta}.$$

Die mittleren Fehler δn_α und δn_β lagen für alle Galvanometerbeobachtungen nach kleinsten Quadraten berechnet vor; die hieraus für die einzelnen Ellipsoide sich ergebenden Werthe von $\delta N/N$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Ellipsoid	I	II	III	IV	V	VI	VII
Verticalcomp.	0,002	0,002	0,002	0,001	0,002	0,002	0,002
Horizontalcomp.	0,006	0,004	0,002	0,003	0,005	0,004	0,003

Durch dieselben Zahlen sind dann auch die Werthe von $\delta\gamma/\gamma$ gegeben, wenn $\delta\gamma$ den Fehler von γ bezeichnet, welcher allein durch die galvanometrische Messung verursacht wird.

Zu diesem Fehler kommt nun hinzu der durch die Unsicherheit von F bedingte. Die Spirale, welche zu den Versuchen benutzt wurde, lag schon fertig gewickelt vor, und bei der früheren Aufwindung des Drahtes war eine Messung der zur Berechnung von F nothwendigen Grössen nicht vorgenommen worden. Eine nachträglich angestellte Messung, welche aber immerhin nicht denselben Grad von Genauigkeit gewähren konnte, wie eine bei der Construction selbst ausgeführte, ergab diejenigen Abmessungen, welche in der früheren Abhandlung mitgetheilt sind. Lässt man bei der Messung des inneren und äusseren Durchmessers der Spirale bei einem Gesamtbetrag von 45,9, bezw. 60,7 mm einen Fehler von 0,15 mm zu, so ergibt sich $\Delta F/F = 0,006$. Dazu kommt noch, dass die äusserste Windungslage eine viel geringere Anzahl von Windungen enthielt als die übrigen und weniger regelmässig gewickelt war. Mit Rücksicht auf diesen Umstand werden wir setzen:

$$\frac{\Delta F}{F} = 0,008.$$

Der entsprechende an γ verursachte Fehler werde bezeichnet durch $\Delta\gamma$; ebenso die beiden an k auftretenden Fehler durch δk und Δk .

In der folgenden Tabelle sind die zur Berechnung von k nothwendigen Werthe $P\gamma$ für die verticale und horizontale Componente des Erdmagnetismus zusammengestellt:

Ellipsoid	I	II	III	IV	V	VI	VII
Verticalcomp.	0,969	0,944	0,926	0,901	0,882	0,807	0,817
Horizontalcomp.	0,975	0,958	0,952	0,923	0,896	0,834	0,850

Die Werthe von $P\gamma$ liegen für alle Ellipsoide nahe an 1, um so näher, je weniger gestreckt dieselben sind; überdies sind alle Werthe grösser für die Vertical- als für die Horizontalcomponente. Da nun die Function k bestimmt wird durch die Gleichung:

$$k = \frac{\gamma}{1 - P\gamma},$$

so ergibt sich, dass ein kleiner Fehler an $P\gamma$ auf den Werth von k vom allergrössten Einfluss ist. Wäre z. B. beim ersten Ellipsoid $P\gamma$ um 1 Proc. zu klein, so würde der Werth von k dadurch im Verhältniss 3:2 vergrössert werden; derselbe Fehler an $P\gamma$ würde bei Ellipsoid VII eine Vergrösserung von k im Verhältniss 18:17, bezw. 15:14 zur Folge haben. Man sieht hieraus, dass die wenig gestreckten Ellipsoide zur Berechnung von k sehr ungeeignet sind. Noch vollständiger ergibt sich dies aus der folgenden Zusammenstellung der berechneten Werthe von k mit den Fehlern Δk und δk :

Ellipsoid		1	I	II	III	IV	V	VI	VII
Vertical-componente	k_v	42	32	37	28	28	22	30	
	Δk	+18 -11	+8 -6	+6 -6	+2,5 -2,5	+2,5 -2,5	+1 -1	+2 -2	
	δk	± 3	$\pm 1,5$	$\pm 1,5$	$\pm 0,5$	$\pm 0,5$	$\pm 0,2$	$\pm 0,5$	
Horizontal-componente	k_h	33	24	23	21	24	18	23	
	Δk	+11 -7	+4 -3	+2 -2	+1,5 -1,5	+1,5 -1,5	+1 -1	+1 -1	
	δk	± 7	$\pm 1,5$	$\pm 0,5$	$\pm 0,5$	$\pm 1,0$	$\pm 0,5$	$\pm 0,5$	
$f = 0$ $m = 0$	k_0	28	20	18	18	23	16	20	
	Δk_0	+6 -5	+2 -2	+1,5 -1,5	+1 -1	+1,5 -1,5	+0,5 -0,5	+1 -1	
	δk_0	$\pm 4,5$	$\pm 1,5$	$\pm 1,0$	$\pm 0,5$	$\pm 1,0$	$\pm 0,3$	$\pm 0,5$	

Hierbei ist zu beachten, dass bei den Fehlern Δk überall entweder das positive oder das negative Vorzeichen zu nehmen ist. Wollen wir die vorhergehenden Werthe benutzen, um auch k als Function des in der Volumeneinheit inducirten Magnetismus m darzustellen, so werden bei der grossen Unsicherheit, mit welcher noch bei dem dritten der benutzten Ellipsoide der Werth von k behaftet ist, zu diesem Zwecke nur die Ellipsoide IV bis VII zu verwenden sein. Setzen wir:

$$k = k_0 + \beta m,$$

so ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe:

Ellipsoid	IV	V	VI	VII
k_v	28	28	22	30
k_r	21	24	18	23
k_0	16	21	15	18
β	1,3	0,55	0,43	0,63

Die für k_0 sich ergebenden Werthe sind um etwa 2 Einheiten kleiner als die in der vorhergehenden Tabelle enthaltenen aus γ_0 berechneten.

In Uebereinstimmung mit der Annahme von Rowland und der Beobachtung von Bauer ergibt sich das Resultat, dass die Function k für verschwindenden Magnetismus nicht verschwindet, sondern einen positiven Werth besitzt, welcher für die Ellipsoide II bis VII innerhalb der Grenzen 15 und 23 liegt, also abhängig ist von der specifischen Natur des Eisens.

Berechnet man die Beobachtungen von Bauer nach der im vorhergehenden angewandten Formel, so ergibt sich aus seiner ersten Beobachtungsreihe mit Anwendung der drei ersten Werthpaare:

$$k = 15,0 + 0,49 m$$

aus der zweiten mit demselben Ringe angestellten Beobachtungsreihe mit Benutzung der vier ersten Werthpaare:

$$k = 15,5 + 0,21 m$$

in Uebereinstimmung mit den in der obigen Tabelle enthaltenen Zahlen. Da nun die Beobachtungen von Bauer auf einen Ring, die von mir angestellten auf Ellipsoide von kleiner Excentricität sich beziehen, so liegt in dieser Uebereinstimmung ein hinreichender Beweis für die Richtigkeit der Poisson'schen Theorie. Zur Vergleichung der von Bauer und mir erhaltenen Resultate werde noch hinzugefügt, dass die bei der Berechnung von γ_0 , bezw. k_0 in Frage kommenden Werthe von m bei mir zwischen den Grenzen 1,88 und 19,08, bei Bauer zwischen den Grenzen 2,01 und 46,72 eingeschlossen sind.

Ausser den im Vorhergehenden ausführlich besprochenen Beobachtungen habe ich im Jahre 1870 eine Beobachtungsreihe mit der verticalen Componente des Erdmagnetismus allein ausgeführt. Die aus derselben sich ergebenden Werthe von γ_v sind im Folgenden mit den im Jahre 1872 erhaltenen zusammengestellt:

Ellipsoid		I	II	III	IV	V	VI	VII
Werthe von γ_v	1870	0,969	1,282	1,646	2,027	2,832	3,607	4,318
	1872	1,020	1,341	1,723	2,099	2,925	3,676	4,448
γ_v 1872								
γ_v 1870		1,053	1,046	1,046	1,035	1,034	1,025	1,030

Was die Temperaturverhältnisse anbelangt, so war im Jahre 1870 bei den Beobachtungen mit den Ellipsoiden I bis IV die Temperatur constant gleich 19° ; bei den Beobachtungen mit V bis VII gleich 24° . Im Jahre 1872 dagegen war die Temperatur bei allen Beobachtungen nahezu constant gleich 20° . Die zwischen den Beobachtungen von 1870 und 1872 bestehenden Differenzen sind jedenfalls grösser als die Fehler der Beobachtungen, welche das Verhältniss γ_v 1872/ γ_v 1870 nur um $0,5\%$ verändern könnten.

Eine Veränderung in der magnetischen Natur der Eisenstücke im Verlauf der zwischen den Beobachtungen liegenden zwei Jahre ist also nicht zu bezweifeln.

Für die entsprechenden Werthe von k ergibt sich die folgende Tabelle.

Ellipsoid	I	II	III	IV	V	VI	VII
1870	13 $-1 \pm 0,5$	15 $-1,5 \pm 0,7$	18 $-1,5 \pm 0,7$	19 -2 ± 1	22 $-1,5 \pm 0,7$	20 $-1 \pm 0,5$	25 $-1 \pm 0,5$
1872	42 -11 ± 3	32 $-6 \pm 1,5$	37 $-6 \pm 1,5$	28 $-2,5 \pm 0,5$	28 $-2,5 \pm 0,5$	22 $-1 \pm 0,2$	30 $-2 \pm 0,5$

Die Vergleichung der für die Ellipsoide I, II und III gefundenen Werthe macht es sehr wahrscheinlich, dass der bei allen Ellipsoiden mit demselben Zeichen auftretende Fehler Δk negativ zu nehmen, d. h. dass der gemessene Werth des von den Windungen der Spirale umschlossenen

Flächeninhaltes zu gross ist. Mit Rücksicht hierauf ist in der obigen Tabelle der constante Theil des Fehlers durchweg mit negativem Zeichen versehen worden. Leider ist der Inductor späterhin einer Reparatur unterworfen worden, sodass eine vollständige Uebereinstimmung der gegenwärtig von demselben umschlossenen Windungsfläche mit der bei der Ausführung der obigen Versuche vorhandenen nicht erwartet werden kann. Aus diesem Grunde wurde von einer auf galvanischem Wege vorzunehmenden Neubestimmung des Flächeninhaltes Abstand genommen.

V. Ersetzung des inducirten Magnetismus durch eine ideale Vertheilung galvanischer Ströme.

Bezeichnen wir wie früher mit F das Potential der gegebenen magnetisirenden Kräfte, mit Q_i das inducirte Potential, so gelten für die an irgend einer Stelle x, y, z des betrachteten Körpers in der Volumeneinheit inducirten magnetischen Momente die Formeln:

$$\alpha = -k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial x}, \quad \beta = -k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial y}, \\ \gamma = -k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial z}.$$

Wir construiren die Flächen constanten Potentiale:

$$F + Q_i = \text{const.}$$

und greifen aus der ganzen Schar derselben zwei aufeinanderfolgende Flächen $F + Q_i$ und $F + Q_i'$ heraus, welche die Oberfläche des Körpers in zwei Curven constanten Potentiales π und π' durchschneiden. Grenzen wir in der zwischen den Potentialflächen liegenden Scheibe ein Volumenelement von cylindrischer Gestalt ab, dessen Mantellinien Kraftlinien des Potentiales $F + Q_i$ sind, so ist das in diesem Elemente inducirte magnetische Moment gleich:

$$-k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial l} dl d\omega,$$

wenn $d\omega$ den Querschnitt dl die Länge des Elementes bezeichnet. Wir können dieses magnetische Moment ersetzen durch ein galvanisches, indem wir den cylindrischen Mantel

des Volumenelementes zum Träger eines galvanischen Stromes machen, dessen Stärke nach magnetischem Maasse bestimmt wird durch die Gleichung:

$$i d\omega = -k \frac{\partial (F + Q_i)}{\partial l} dl d\omega,$$

woraus: $i = k \{ (F + Q_i) - (F' + Q_i') \}.$

Dieselbe Betrachtung gilt für jedes andere Volumenelement, welches in derselben Weise aus der zwischen den beiden Potentialflächen liegenden Scheibe herausgeschnitten wird. Wenn man also diese ganze Scheibe in lauter einzelne Volumenelemente zerlegt, so kann der in jedem derselben inducirte Magnetismus ersetzt werden durch einen auf der cylindrischen Mantelfläche verlaufenden Strom von der Stärke i ; da diese Stromstärke überall dieselbe ist, so zerstören sich alle im Inneren der Scheibe verlaufenden Stromtheile, und es bleiben nur die an der äusseren Oberfläche des Körpers verlaufenden übrig, welche sich zu einem einzigen in dem durch π und π' begrenzten Streifen die Oberfläche des Körpers umziehenden Strome zusammensetzen. Dieser Strom, dessen Stärke gleich:

$$k \{ (F + Q_i) - (F' + Q_i') \}$$

ist, ersetzt die magnetische Wirkung der von den Curven π und π' begrenzten Körperscheibe für alle ausserhalb derselben gelegenen Punkte. Dieselbe Ersetzung gilt aber auch bei den übrigen Scheiben, in welche der Körper durch das System der Potentialflächen zerlegt wird, und wir erhalten daher den Satz.

Der in einem beliebigen Körper durch ein gegebenes Potential F inducirte Magnetismus kann in seiner Wirkung auf äussere Punkte ersetzt werden durch ein System von galvanischen Strömen, welches seine Oberfläche umzieht. Die Bahnen dieser Ströme sind bestimmt durch die Linien, in welchen die Potentialflächen $F + Q_i$ die Oberfläche des Körpers durchschneiden; die Stärke des in dem Intervall zweier benachbarter Potentiallinien fließenden Stromes ist nach magnetischem Maasse gleich

der Magnetisirungsfuction k multiplicirt mit der Differenz der jenen beiden Linien entsprechenden Potentialwerthe.

Die Wirkungen des in einem gegebenen Körper inducirten Magnetismus sind vollständig bestimmt, wenn die der inneren Vertheilung entsprechende Oberflächenbelegung gegeben ist. Daraus folgt, dass auch das mit jener Vertheilung äquivalente System galvanischer Ströme aus dem Potential Q der Oberflächenbelegung allein abgeleitet werden kann. Diese Bemerkung führt zu einer etwas anderen Behandlung der vorhergehenden Aufgabe, welche deshalb von Bedeutung ist, weil sie sich ganz in derselben Weise auf permanente Magnete in Anwendung bringen lässt.

Das Potential F der äusseren Kräfte hängt mit dem Potential Q der Oberflächenbelegung zusammen durch die Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = - \frac{1}{4\pi k} \left\{ \frac{\partial Q_i}{\partial n_i} + \frac{\partial Q_a}{\partial n_a} \right\} - \frac{\partial Q_i}{\partial n_i}.$$

Führen wir eine neue Function Φ ein, welche an der Oberfläche des Körpers der Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = \frac{\partial Q_a}{\partial n_a},$$

im Inneren desselben der Gleichung:

$$\Delta \Phi_i = 0$$

genügt, so wird:

$$Q_i = - \frac{1}{4\pi} \int T_i \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial n_i} d\sigma.$$

Es erscheint also Q_i als das Potential einer Oberflächenbelegung, deren Dichte gegeben ist durch:

$$- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial n_i}.$$

Construiren wir die Potentialflächen $Q_i + \Phi_i = \text{const.}$, so werden wir dieselben Betrachtungen wiederholen können, welche wir im Vorhergehenden mit Bezug auf das Potential $F + Q$ angestellt haben. Nur wird das auf ein Volumenelement $dld\omega$ kommende magnetische Moment jetzt darzustellen sein durch:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial l} dl d\omega.$$

Bezeichnen wir wieder durch π und π' zwei aufeinanderfolgende Linien constanten Potentials an der Oberfläche des Körpers, so ergibt sich für die Stärke des zwischen denselben verlaufenden galvanischen Stromes der Werth:

$$\frac{1}{4\pi} \{(Q_i' + \Phi_i') - (Q_i + \Phi_i)\},$$

welcher sich von dem früher gefundenen im wesentlichen nur dadurch unterscheidet, dass $-\frac{1}{4}\pi$ an die Stelle von k getreten ist.

Wenden wir diese Betrachtungen an auf den Fall einer Kugel, welche durch eine in der Richtung der z -Axe wirkende constante Kraft magnetisirt wird, so haben wir:

$$F = -Cz, \quad Q_i = \frac{\frac{4}{3}\pi k C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot z, \quad Q_a = \frac{k v C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot \frac{z}{r^3},$$

wo $v = \frac{4}{3}\pi a^3$ gleich dem Volumen der Kugel.

$$\text{Somit:} \quad F + Q_i = -\frac{C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot z,$$

oder, wenn wir unter φ den Polabstand des Punktes, auf welchen das Potential sich bezieht, unter r seinen Radius vector verstehen:

$$F + Q_i = -\frac{C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot r \cos \varphi.$$

Die Gleichung der auf der Oberfläche der Kugel verlaufenden Curven constanten Potentials ist:

$$F + Q_i = -\frac{C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot a \cos \varphi,$$

d. h. diese Curven sind Parallelkreise; für die Stärke des in dem Intervall zweier aufeinander folgenden Kreise φ und $\varphi + d\varphi$ circulirenden Stromes ergibt sich der Werth:

$$\frac{k c}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot a \sin \varphi d\varphi.$$

Was die Anwendung der zweiten im Vorhergehenden angegebenen Methode zur Bestimmung der äquivalenten Oberflächenströme anbelangt, so ergibt sich zunächst:

$$\frac{\partial Q_a}{\partial n_a} = -\frac{\frac{4}{3}\pi k C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot \frac{z}{a},$$

somit: $\frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = -\frac{\frac{4}{3}\pi k C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cos \varphi, \quad \Phi_i = \frac{\frac{4}{3}\pi k C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot z,$

$$Q_i + \Phi_i = \frac{4\pi k C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} \cdot a \cos \varphi.$$

Für die Stärke des zwischen zwei aufeinanderfolgenden Potentiallinien circulirenden Stromes ergibt sich wieder der Werth:

$$\frac{1}{4\pi} \{ (Q'_i + \Phi'_i) - (Q_i + \Phi_i) \} = \frac{k C}{1 + \frac{4}{3}\pi k} a \sin \varphi d\varphi.$$

Die letztere Art der Berechnung ist, wie wir schon bemerkt haben, auch anwendbar auf permanente Magnete; wir können dieselbe benutzen, um dasjenige System von galvanischen Strömen zu bestimmen, welches an der Oberfläche der Erde circulirend den Magnetismus der Erde in allen auf den umgebenden Raum ausgeübten Wirkungen zu ersetzen im Stande ist.

Bezeichnen wir das Potential der idealen Vertheilung des Erdmagnetismus durch Q , so ist für Punkte des äusseren Raumes:

$$Q_a = a \left\{ \frac{a^2 P'}{r^2} + \frac{a^3 P''}{r^3} + \frac{a^4 P'''}{r^4} + \dots \right\},$$

für Punkte im Inneren:

$$Q_i = a \left\{ \frac{r P'}{a} + \frac{r^2 P''}{a^2} + \frac{r^3 P'''}{a^3} + \dots \right\},$$

wenn r der Radius vector des Punktes, auf welchen das Potential sich bezieht, a der Halbmesser der Erde. Somit:

$$\frac{\partial Q_a}{\partial n_a} = \frac{\partial Q_a}{\partial r} \quad \text{für } r = a$$

$$= -2 P' - 3 P'' - 4 P''' - \dots,$$

da: $\frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial r},$ so ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{für } r = a \quad \text{gleich} \quad 2 P' + 3 P'' + 4 P''' + \dots$$

Woraus: $\Phi_i = a \left\{ 2 \frac{r P'}{a} + 3 \frac{r^2 P''}{a^2} + 4 \frac{r^3 P'''}{a^3} + \dots \right\},$

und: $Q_i + \Phi_i = a \left\{ 3 \frac{r P'}{a} + 3 \frac{r^2 P''}{a^2} + 7 \frac{r^3 P'''}{a^3} + \dots \right\}.$

Die Gleichung der Linien constanten Potentials an der Oberfläche der Erde, d. h. die Gleichung der Strömungslinien ist demnach:

$$Q_i + \Phi_i = a \left\{ \frac{1}{3} P' + \frac{1}{5} P'' + \frac{1}{7} P''' + \dots \right\}.$$

Die Functionen P' , P'' , $P''' \dots$ sind Kugelfunctionen erster, zweiter, dritter ... Ordnung mit Bezug auf die geographische Länge ψ und die Poldistanz ϑ eines an der Oberfläche der Erde gelegenen Punktes. Es kann also $P^{(n)}$ dargestellt werden in der Form:

$$P^{(n)} = g_{n0} C_0^n + g_{n1} C_1^n + h_{n1} S_1^n \\ + g_{n2} C_2^n + h_{n2} S_2^n + \dots \\ + g_{nn} C_n^n + h_{nn} S_n^n,$$

$$\text{wo: } C_m^n = \sin^m \vartheta \mathfrak{P}_m^n(\cos \vartheta) \cos m \psi,$$

$$S_m^n = \sin^m \vartheta \mathfrak{P}_m^n(\cos \vartheta) \sin m \psi,$$

$$\mathfrak{P}_m^n(\cos \vartheta) = \cos \vartheta^{n-m} - \frac{n-m}{2} \frac{n-m-1}{2n-1} \cos \vartheta^{n-m-2} \\ + \frac{n-m}{2} \frac{n-m-1}{2} \frac{n-m-2}{2n-1} \frac{n-m-3}{2n-3} \cos \vartheta^{n-m-4} \\ - + \dots$$

Nehmen wir auf der Erdoberfläche zwei benachbarte Punkte a und a' , welche auf zwei verschiedenen Potentiallinien π und π' gelegen sind, so wird die Stärke des zwischen diesen Potentiallinien circulirenden Stromes gegeben sein

$$\text{durch: } \frac{1}{4\pi} \{ (Q_i' + \Phi_i') - (Q_i + \Phi_i) \}.$$

Die Potentiale Q_i und Φ_i sind Functionen von ϑ und ψ . Nehmen wir an, die beiden Punkte a und a' hätten dieselbe geographische Länge ψ , aber verschiedene Poldistanzen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, so wird:

$$Q_i' + \Phi_i' = Q_i + \Phi_i + \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta,$$

somit die Intensität des zwischen π und π' verlaufenden Stromes:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta = \Theta d\vartheta.$$

Wählen wir auf der Curve π' einen Punkt a'' umgekehrt so, dass er mit a dieselbe Poldistanz, aber eine andere Länge besitzt, so ergibt sich für die Stärke des Stromes zwischen π und π' der Werth:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \psi} \cdot d\psi = \Psi \cdot d\psi.$$

Bezeichnen wir den Winkel, unter welchem die Strömungskurve im Punkte a den Meridian durchschneidet, durch α , so ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \vartheta \cdot d\psi}{d\vartheta},$$

oder da: $\Theta d\vartheta = \Psi d\psi, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Theta \sin \vartheta}{\Psi}.$

Beispielsweise möge der Werth der Stromstärke und die Richtung der Strömung für denjenigen Punkt der Erdoberfläche berechnet werden, in welchem der Aequator von dem Meridian von Greenwich durchschnitten wird.

Für $\psi = 0$ und $\vartheta = 90^\circ$ ergibt sich:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \vartheta} = -3g_{10} - \frac{3}{2}g_{21} + \frac{7}{3}(\frac{3}{2}g_{30} - g_{32}) + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}g_{41} - g_{43}),$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \psi} = 3h_{11} + 5h_{22} + \frac{7}{3}(3h_{33} - \frac{1}{2}h_{31}) + \frac{1}{2}(4h_{44} - \frac{3}{2}h_{42}),$$

oder mit Benutzung der von Erman und Petersen berechneten Werthe der Gauss'schen Constanten:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \vartheta} = 2448, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \psi} = 854.$$

Somit nach absolutem Maasse:

$$\Theta = 4333 \cdot 10^6, \quad \Psi = 1512 \cdot 10^6, \quad \alpha = 70^\circ 46'.$$

Die Stromstärke ist gegeben durch $\Theta d\vartheta$; besitzt der zwischen den Potentiallinien π und π' liegende Streifen in der Richtung des Meridians eine Breite von 1000 mm, so ist:

$$d\vartheta = \frac{1000}{a},$$

und es ergibt sich die Stärke des in diesem Streifen circulirenden Stromes zu 680 Einheiten des magnetischen Strommaasses.

Für den Pol, d. h. für $\vartheta = 0$ und $\psi = 0$ wird:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \vartheta} = 3g_{11} + \frac{3}{2}g_{21} + \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5}g_{31} + \frac{1}{2}g_{41} = 57.$$

$$\frac{1}{a \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial (Q_i + \Phi_i)}{\partial \psi} = 3h_{11} + \frac{3}{2}h_{21} + \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 5}h_{31} + \frac{1}{2}h_{41} = 435.$$

Woraus: $\Theta = 101 \cdot 10^6, \quad \alpha = 7^\circ 28'.$

VI. *Ueber Krystallanalyse; von O. Lehmann.*

Unter diesem Namen möchte ich eine neue Art qualitativer chemischer Analyse in Vorschlag bringen, welche namentlich für organische Substanzen, die sehr häufig durch das gewöhnliche Verfahren kaum zu erkennen sind, zur Anwendung kommen dürfte.

Als ich mich vor mehreren Jahren eingehender mit mikroskopischer Botanik beschäftigte, kam mir immer und immer wieder die Frage, warum es denn nicht auch eine Naturgeschichte der chemischen Verbindungen ähnlich der der organischen Körper gäbe, warum man nicht die Form, in welcher diese Stoffe bei ihrer freien ungehinderten Krystallisation auftreten, die ja doch ganz wesentlich durch die chemische Natur dieser Substanzen, durch die Form und Anziehungskraft ihrer Molecüle bedingt sein muss, in erster Linie berücksichtige und sie ebenso wie bei der Bestimmung einer Pflanze oder eines Thieres als Ausgangspunkt oder wenigstens als Hülfsmittel bei der chemischen Analyse benütze. Ich suchte mir deshalb durch Experimente Klarheit darüber zu verschaffen, ob diese Art der Analyse möglich sei oder nicht.

Dass durch die gewöhnliche Art und Weise der Krystallbestimmung, welche einzig die Messung regelmässiger Formen im Auge hat, dieses Ziel nicht zu erreichen sei, war ohne weiteres ziemlich klar. Selbst verschiedenen Systemen angehörige Krystalle sehen sich ja oft so täuschend ähnlich, dass nur eine ganz exacte Bestimmung der Winkel und eingehende optische Untersuchungen zu der gewünschten Klarheit; namentlich zur sicheren Unterscheidung zweier ähnlich krystallisirenden Verbindungen führen können. Beide Bestimmungen erfordern aber nicht nur ausgezeichnete Instrumente, sondern auch ziemlich beträchtlichen Aufwand an Zeit, und was das allergrösste Hinderniss, sie werden oft geradezu unmöglich, wenn es nicht gelingt, vollkommen ausgebildete Krystalle der betreffenden Substanz zu erhalten. Gerade diese letzte Schwierigkeit macht die Krystallmessung

zum Gebrauch für die chemische Analyse fast völlig unbrauchbar. Um solche regelmässige Krystalle zu erhalten, braucht man mit wenigen Ausnahmen einerseits eine recht beträchtliche Menge von Substanz, andererseits eine ebenfalls sehr beträchtlich lange Zeit, und in sehr vielen Fällen können trotz aller Mühe gut ausgebildete Krystalle überhaupt auf keine Weise erhalten werden. In der Regel sind die Krystalle, die z. B. bei der chemischen Ausfällung einer Substanz aus einer Lösung oder beim Abdampfen des Lösungsmittels erhalten werden, ausserordentlich klein und nur mittelst des Mikroskops erkennbar. Es fehlt uns somit jedes Mittel, dieselben anzufassen und so zu drehen, dass wir nach der gewöhnlichen optischen Methode ihre Winkel messen könnten, und die andere Art der Messung, mittelst der Mikrogoniometer, lässt an Zuverlässigkeit sehr viel zu wünschen. Immerhin könnten wir uns indess von der einfachen Erkennung der Form, der Art der auftretenden Krystallflächen, einigen Gewinn versprechen, wenn es gelänge, die etwas schwierige Aufgabe zu lösen, aus den verschiedenen Ansichten, die uns das Mikroskop liefert, in zuverlässiger Weise ein vollkommenes Bild des Körpers zu construiren. Offenbar sind in dieser Beziehung Täuschungen ausserordentlich leicht möglich, denn wir sehen eben mittelst des Instrumentes die Krystalle nicht als Körper, sondern nur ihre Projectionen, zu dem unter ganz eigenthümlichen ungewohnten Beleuchtungsverhältnissen, oft mit ausserordentlich ungleichmässiger Ausdehnung gleichwerthiger Flächen etc. Ich versuchte, diese Schwierigkeit zu umgehen dadurch, dass ich durch Verschieben des Deckglases die Krystalle zum Rollen brachte und so Ansichten von allen möglichen Seiten erhielt, wie ich es wünschte. Allein sofort ergaben sich allerlei neue Schwierigkeiten, bedingt durch das rasche Verdunsten der Lösung, das Empordringen derselben auf die obere Seite des Deckglases, die hierdurch entstehenden Efflorescenzbildungen, die zum Rollen selten geeignete Form der Krystalle, das feste Anwachsen auf dem Objectträger u. dergl. m. Glücklicherweise lassen sich diese letzteren Schwierigkeiten, wie ich schon früher in meiner Arbeit über

Krystallwachsthum¹⁾ dargethan habe, sehr einfach dadurch überwinden, dass das gebräuchliche, vollkommen ebene Deckglas durch ein flaches Uhrglas ersetzt und eine solche Menge Lösung angewandt wird, dass die dünne in dem capillaren Zwischenraum enthaltene Flüssigkeitsmasse noch von einem relativ sehr dicken Ring umgeben ist, welcher durch die Adhäsion am Rande des Uhrglases festgehalten wird und die Gefahr der Störung der Beobachtungen durch allzu rasche Verdunstung völlig ausschliesst, insofern er nöthigenfalls sehr leicht wieder ohne Störung der beobachteten Krystalle ersetzt werden kann. Das Anhaften und die ungeeignete Ausbildung der Krystalle beseitige ich dadurch, dass ich die zuerst entstandene Krystallmasse durch Verschieben des Uhrglases auf dem Objectträger unter gleichzeitigem, schwachem Drücken zerreiße und hierauf soweit erwärme, dass sich die entstandenen Fragmente bis auf wenige sehr feine Theilchen auflösen. Beim Wiedererkalten wachsen dann diese Fragmente zu völlig freien, also rundum regelmässig ausgebildeten Formen aus und lassen sich leicht zum Rollen bringen. Letzteres führe ich in der Art aus, dass ich während des Wachsthums die beiden Zeigefinger auf zwei entgegengesetzte Seiten des Randes des Uhrglases lege und dieses nun durch abwechselndes Niederdrücken des einen und anderen in schaukelnde Bewegung bringe. Es wird hierdurch einerseits in den meisten Fällen das lästige Ansetzen der Krystalle völlig verhütet, und andererseits gelingt es, dieselben ganz in der gewünschten Art zum Rollen zu bringen, sie von allen Seiten zu beobachten und sich somit einen vollkommenen Ueberblick über die ausgebildeten Flächen zu verschaffen.

Vergleicht man auf solche Weise Krystallisationen verschiedener Substanzen, so zeigen sich allerdings beträchtliche Verschiedenheiten, allein sehr häufig gelingt es durchaus nicht, regelmässige Formen zu erhalten, und selbst wenn dies der Fall, so kann wieder eine sehr beträchtliche weitere Schwierigkeit sich einstellen, nämlich die, dass die Form

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 453 ff. 1877.

sehr einfach ist, z. B. ein reguläres Octaëder oder ein tetragonales oder rhombisches, welche drei Formen einander sehr ähnlich sehen können. Man wird zwar durch die bekannte optische Methode dieselben unter günstigen Umständen leicht unterscheiden können, allein wie viele Substanzen gibt es nicht, die sämmtlich in regulären Octaëdern krystallisiren, sodass ihre Erkennung lediglich nach ihrer Krystallform völlig illusorisch wird? Diese Bemerkung dürfte wohl völlig genügen, um zu zeigen, dass eine solche Analyse, welche sich einzig auf die Erkennung der zudem nur unter bestimmten, oft recht schwer zu erlangenden regelmässigen Formen stützt, nicht wohl möglich ist.

Es ist somit, soll anders das gesteckte Ziel erreicht werden, durchaus erforderlich, das Bereich der regelmässigen Formen zu verlassen und auch die unregelmässigen Gebilde, die sogenannten Wachstumsformen, Krystallskelette, Trichiten u. s. w. in den Kreis der Beobachtung zu ziehen.

Ich machte den ersten Versuch in dieser Richtung mit Niederschlägen von Chlorblei. Es ergab sich eine so grosse Mannichfaltigkeit von krummflächigen, blumenartigen Formen, dass eine kurze bündige Charakteristik derselben, wie sie zum Zwecke einer chemischen Analyse nöthig wäre, durchaus nicht gegeben werden konnte. Ein Versuch, dieselben in verschiedene Classen zu bringen, deren jede durch eine bestimmte typische Form charakterisirt wäre, erwies sich ebenfalls als verfehlt. Nothwendigerweise mussten zuerst die Gesetze erkannt sein, welche das Auftreten der krummflächigen Formen regelten, ehe an eine Classificirung derselben gedacht werden konnte.

Die Resultate dahinzielender Untersuchungen, welche sich über eine sehr grosse Zahl von Substanzen erstreckten, sind grösstentheils in meiner Arbeit über Krystallwachsthum niedergelegt. Es zeigte sich, dass die beobachteten Anomalien in drei Gruppen gebracht werden konnten, nämlich Bildung von:

1) Krystallskeletten, Wachstumsformen, hauptsächlich hervorgebracht durch Beschleunigung der Krystallisation, wodurch nämlich, theils infolge der Bildung eines substanz-

ärmeren Hofes um den Krystall, theils durch die Störung der Sättigung infolge freiwerdender latenter Wärme, also die Bildung eines Hofes erwärmter Flüssigkeit, gegen die zugespitzten Stellen der Krystalloberfläche weit mehr Substanz zuströmen muss, als gegen die flacheren, sodass sich dieselben unverhältnissmässig verlängern und schliesslich zu dünnen Aesten ausstrecken, aus welchen dann seitlich secundäre, oft selbst wieder mit tertiären versehene Aeste auswachsen.

2) Trichiten, gekrümmte und verzweigte Formen, Sphärokrystalle, hauptsächlich durch Zähigkeit der Lösung bedingt, wahrscheinlich durch den hemmenden Einfluss der Molecüle des Lösungsmittels auf die eben sich neu ansetzenden, welcher sich namentlich bei dünnen, haarförmigen Krystallen geltend machen, und weil er für alle Molecüle von gleicher Stärke ist, zu einer stetigen Krümmung des Krystalls führen muss, die sich allerdings infolge der gegenseitigen Wirkung der Molecüle aufeinander auszugleichen sucht, indess hierin durch die Zähigkeit des Lösungsmittels gehindert wird. Erst wenn sich der Krystall bis zu einem gewissen Grade verdickt hat, erreicht die innere moleculare Spannung die nöthige Stärke, um denselben gegen den Widerstand des Lösungsmittels zu verschieben, und bewirkt Geradstreckung oft mit solcher Gewalt, dass der Krystall Risse erhält oder gar zersplittert. Die einzelnen Splitter wachsen natürlich selbständig weiter, d. h. der Krystall verzweigt sich, und häufig entsteht so ein kugelförmiges, radialfaseriges Aggregat, ein sogenannter Sphärokrystall.

3) Verwachsungen mit fremden Substanzen, bedingt durch den Umstand, dass nicht nur gleichartige, sondern auch chemisch verschieden gebaute Molecüle sich gegenseitig anziehen. Befindet sich daher neben der krystallisirenden Substanz noch eine zweite in Lösung, und zwar in solcher Menge, dass die Lösung derselben in Bezug auf die Krystalle der ersten Substanz gesättigt ist, dann setzen sich diese fremden Molecüle zuweilen in regelmässiger Stellung zwischen die der ersten und ziehen nun entweder solche ihrer Art an sich oder solche der ersten, je nach dem Ge-

halte der Lösung, und es entsteht ein eigenthümliches Krystallaggregat, welches zwar in seinem äusseren Habitus einem regelmässigen Krystall durchaus ähnlich sehen kann, seinem inneren Bau nach dagegen aus zwei ganz fremdartigen Krystallen besteht. Häufig verräth sich diese anomale Structur auch durch Anomalien der Form. Wenn z. B. die erste Substanz nadelförmig krystallisirte, die fremde in Octaëdern, so sind bei letzterer drei Richtungen gleichwerthig, es können sich also die Nadeln in drei Arten an die Octaëder anlegen, sodass sternförmige Gebilde entstehen müssen, die mit Zwillingbildungen sehr grosse Aehnlichkeit besitzen.

Infolge der besprochenen drei Ursachen, welche zu anomaler Krystallbildung Veranlassung geben können, ist fast von jeder überhaupt krystallisirenden Substanz eine sehr grosse Mannichfaltigkeit von Formen zu erhalten, welche sehr wohl dazu dienen können, dieselbe zu charakterisiren, und welche auch mit Leichtigkeit, ohne grossen Aufwand an Zeit und Material, mit Hülfe des Mikroskops beobachtet werden können, zumal da die Bedingungen ihrer Entstehung nunmehr, wenigstens im allgemeinen, bekannt sind.

Immerhin lässt sich auch gegen dieses erweiterte Verfahren der schon früher gemachte Einwand erheben, ob denn nicht auch in Bezug auf diese unregelmässigen Formen Uebereinstimmung zwischen zwei chemisch verschiedenen Stoffen vorkommen könne und hierdurch Veranlassung zu Irrthümern gegeben sei, und ferner ob nicht gerade dadurch, dass diese Unregelmässigkeiten vorzugsweise durch äussere Bedingungen hervorgebracht sind, also nur in geringem Maasse durch die eigentliche Natur der Substanz beeinflusst werden, ihre Verwendbarkeit zur Charakterisirung der Substanzen illusorisch mache. Durch die Erfahrung wird indess dieser Einwand fast völlig entkräftet.

Wenn nämlich auch beispielsweise octaëdrische Krystallskelette zweier verschiedenen Substanzen sich unter gewissen Bedingungen ganz und gar gleichsehen können, so sind dieselben doch, wenn wir die Substanzen genau unter denselben vorgeschriebenen Bedingungen krystallisiren lassen, in der Regel sehr deutlich von einander unterschieden, sodass es

immerhin in unserer Gewalt steht, solche Krystallisationsbedingungen anzuwenden, unter welchen eine zuverlässige Unterscheidung ohne Mühe möglich ist. Freilich lässt sich in anderer Hinsicht die Möglichkeit einer völligen Uebereinstimmung unter allen Umständen doch nicht als gänzlich ausgeschlossen betrachten, und wir müssen deshalb suchen, ob die Krystallographie uns nicht noch neue Anhaltspunkte zu geben vermag. Solche lassen sich glücklicherweise noch in Menge finden.

Zunächst ist bekannt, dass eine sehr grosse Anzahl von Körpern unter gewissen Bedingungen, namentlich bezüglich der Temperatur mit dem Lösungsmittel moleculare Verbindungen eingeht, sodass die Krystalle nicht aus ganz reiner Substanz bestehen, sondern einen bestimmten Gehalt an Krystallwasser, Krystallalkohol, Krystallbenzol u. dergl. enthalten, und es wird somit bei sehr vielen Substanzen möglich sein, aus der Lösung derselben je nach der Höhe der Temperatur ganz verschiedenartige Krystalle zu erhalten, was wiederum ein sehr einfaches weiteres Erkennungsmittel bildet.

Molecülverbindungen können aber auch, wie ich ausführlicher in meiner Abhandlung über physikalische Isomerie¹⁾ dargethan habe, nicht nur zwischen verschiedenartigen, sondern auch gleichartigen Molecülen vorkommen, sodass also die betreffende Substanz in mehreren ganz verschiedenartig krystallisirenden Modificationen auftreten kann, wie solche ja z. B. beim Schwefel schon längst bekannt sind. Diese Erscheinung ist, wie sich aus dem raschen Wachsen unserer hierauf bezüglichen Kenntnisse ergibt, durchaus nicht so selten, als gewöhnlich angenommen wird, und kann deshalb gleichfalls recht gut als Erkennungsmittel dienen. Doch gehen wir noch einen Schritt weiter, gehen wir von den Molecülverbindungen über zu den eigentlich chemischen, so eröffnet sich uns ein neues ganz unabsehbares Feld, von dem sich sicherlich eine gar sehr reichliche Ernte einfacher, leicht auszuführender und doch auch ganz zuverlässiger Re-

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 97 ff. 1877.

actionen einheimen lassen wird. Schon die Auswahl der Reactionen ist ja bei Anwendung der Krystallanalyse ganz ausserordentlich viel grösser, als bei der gewöhnlichen Methode. Denn während sonst das Eintreten eines bestimmten Niederschlags, einer Färbung oder einer ähnlichen leicht erkennbaren Erscheinung nöthig ist, genügt bei Anwendung der Krystallanalyse jede zur Bildung eines festen krystallisirbaren Körpers führende Reaction, wenn auch gar kein Niederschlag u. dgl. bemerkbar ist, weil sicherlich nach dem Abdampfen oder Verdunsten des Lösungsmittels der neue Körper in Form von Krystallen übrig bleiben muss. Allein von allergrösster Wichtigkeit wird dieses Verfahren dadurch, dass es ermöglicht, auch Körper, die kein Bestreben haben, zu krystallisiren, sowie auch Flüssigkeiten und Gase zu untersuchen, da man ja dieselben leicht mit passenden Reagentien sich zu krystallisirbaren Producten vereinigen lassen kann.

Die Art und Weise, wie die zu derartigen Untersuchungen nöthigen Operationen, namentlich das Erwärmen und Abkühlen der Präparate, ausgeführt werden können, findet man schon in meiner bereits citirten Arbeit über Krystallwachsthum ausführlicher beschrieben, ebenso die Einrichtung des Mikroskops, wie sie zu diesen Versuchen nöthig ist. Seit dem Erscheinen jener Abhandlung habe ich indess an dem Apparate mehrere wesentliche Verbesserungen angebracht, sodass sich derselbe nun weit leichter handhaben lässt und auch für andere physikalische Untersuchungen, wie solche über electriche Entladung¹⁾ brauchbar ist. Es möge mir deshalb gestattet sein, eine kurze Beschreibung desselben hier folgen zu lassen.

Das erste, was bei der Construction zu berücksichtigen war, ist die Stabilität des Ganzen. Gerade weil das Verschieben der Objecte während der Beobachtung einen Hauptpunkt der Untersuchungsmethode bildet, so muss das ganze Instrument so stabil sein, dass man, ohne Besorgniss dasselbe umzustossen oder auch nur von seiner Stelle zu rücken, die Hände auflegen und auch die für die optischen Untersuchun-

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 11. p. 636. 1880.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XIII.

gen nöthigen Drehbewegungen ausführen kann. Daher wird der Fuss des Ganzen von einer sehr schweren, grossen gusseisernen Platte gebildet, welche durch vier Stellschrauben an ihren Eckpunkten horizontal gestellt werden kann. Da das Instrument zu hoch würde, wollte man es mit diesen Stellschrauben auf die Tischplatte stellen, der Tisch selbst andererseits zu niedrig zum bequemen Sitzen, wollte man seine Füsse entsprechend verkürzen, so ist diese Platte in eine ihr genau gleichgeformte Oeffnung der Tischplatte eingelassen und steht mittelst der Stellschrauben auf zwei in passender Höhe angebrachten starken und durch mehrfache Querstücke durchaus fest angeschraubten Leisten. Aus dem gleichen Grunde der besseren Stabilität ist der Verschiebungsmechanismus des Tubus durchaus anders ausgeführt, wie bei den gewöhnlichen Mikroskopen. Es ist nämlich die Hülse, welche denselben trägt, ganz fest mit der Fussplatte durch einen Γ -förmigen Arm verbunden, wie aus den Figuren 2 und 3 Taf. III leicht zu ersehen ist.¹⁾ Es ermöglicht diese Einrichtung, den oberen Querbalken sehr lang zu machen, was für die bequeme Hantirung auf dem Objecttisch von ausserordentlichem Vortheil ist. Bei manchen Versuchen, wie beim Experimentiren mit Schmelzflüssen in Glühtemperatur, wobei eine grössere Flamme untergestellt werden muss, ist es nöthig, den Objecttisch höher zu stellen, wodurch selbstverständlich auch eine ziemlich beträchtliche Höherstellung des Tubus verlangt wird, weit grösser, als sie durch einfache Verschiebung in der Hülse erzielt werden kann. Zu diesem Zwecke ist der Γ -förmige Arm aus zwei Theilen angefertigt, nämlich aus einer fest in die Fussplatte eingeschraubten Röhre und einem starken cylindrischen Arm, welcher dicht in dieser Röhre verschiebbar ist und durch eine Geradföhrung beim Auf- und Abschieben stets in gleicher Richtung gehalten wird. Damit nun die oben geforderte Stabilität durch diese Zweitheilung nicht gemindert

1) Fig. 2 stellt die Vorder-, Fig. 3 die Seitenansicht des Instruments dar. Bei letzterer ist das dem Beobachter zugewandte Stück des Tisches weggeschnitten gedacht. Bei beiden Figuren fehlen einzelne Theile, welche man sich nach der folgenden Beschreibung leicht vorstellen kann.

werde, muss dafür gesorgt sein, dass der Arm absolut sicher in seiner Hülse befestigt werden kann. Der obere Theil ist in regelmässigen Abständen, die gleich der Verschiebung sind, um welche der Tubus in seiner Hülse auf- und abbewegt werden kann, quer durchbohrt. Um den Arm in einer bestimmten Lage zu fixiren, wird in das gerade passende Loch ein stählener Stift eingeschoben und die Mutter am unteren Ende fest angezogen. Es wird hierdurch der Stab mit solcher Sicherheit befestigt, als ob er mit dem Rohre ein einziges Stück bildete. So wird also der Forderung der Stabilität vollkommen Genüge geleistet, obwohl hierdurch freilich die sonst gebräuchliche, und wenn auch unter gewöhnlichen Umständen nicht absolut erforderliche, doch immerhin sehr bequeme und darum wünschenswerthe feine Einstellung in Wegfall kommt. Um dieselbe dennoch zu ermöglichen, ist an der Hülse des Tubus eine zweckentsprechende Vorrichtung angebracht, welche in den Figuren 5a und b Taf. III im Durchschnitt und in Fig. 6 Taf. III, von aussen gesehen, dargestellt ist und wohl keiner weitläufigen Beschreibung bedarf. Der Tubus *a* ist in der Hülse *b* einfach unter Reibung verschiebbar, wodurch die grobe Einstellung bewirkt wird. Die Hülse *b* ist selbst wieder in einer weiteren, aus zwei Theilen bestehenden Hülse *c*, *c* beweglich, indess nicht gänzlich frei. In der Mitte ist sie nämlich mit einem Gewinde versehen, über welches eine Mutter geschraubt ist, die durch arretirende Stifte *d*, *d* in der Hülse *c*, festgehalten wird. Dreht man diese Mutter, so wird die Hülse *b*, je nach dem Sinn der Drehung, langsam gehoben oder gesenkt, wie es die feine Einstellung erfordert. Damit das Gewinde der Mutter immer dicht an das der Hülse *b* anschliesse, sind an *c* noch zwei seitliche enge Hülsen *e*, *e* befestigt, welche zwei, unten befestigte Spiralfedern bergen, deren obere Enden an die hervorragenden Theile einer länglichen Platte *f* angreifen, welche über die Hülse *b* geschoben ist und an dem Gewinde derselben anstösst.

Eine weitere Eigenthümlichkeit ist die Befestigung des Objecttisches, welcher nicht wie gewöhnlich mit dem Tubus

direct verbunden, sondern auf einem eigenen ziemlich complicirten Fuss angebracht ist, der einer näheren Beschreibung bedarf. Zum besseren Verständniss ist derselbe in Taf. III Fig. 7 im Durchschnitt abgebildet. *A* ist ein Stück der bereits erwähnten schweren Fussplatte. In der Mitte derselben um die Axe des Mikroskoptubus ist eine grosse conisch ausgedehnte Oeffnung angebracht, in welcher sich der ebenfalls conisch gedrehte Ring *B* bewegen kann. Derselbe ist an seinem Umfange gezahnt und kann durch das Triebbad *D* in Umdrehung versetzt werden. Auf diesen Ring ist eine Kreistheilung *a* aufgeschraubt, die durch eine darüber befindliche Blechplatte *b* vor Beschädigung durch Chemikalien geschützt wird. Unmittelbar auf der getheilten Scheibe ist eine mit zwei parallelen Schlitzten versehene gusseiserne Platte *E* von etwas kleinerem Durchmesser befestigt, auf welcher erst der eigentliche Fuss *F* des Objecttisches beweglich aufgesetzt ist. Dieser Fuss hat Hufeisenform und ist auf seiner unteren Seite mit zwei nach unten sich verschmälernden Leisten versehen, die genau in die Schlitzte der gusseisernen Platte einpassen, sodass er also in der Richtung dieser Schlitzte sich verschieben lässt (Taf. III Fig. 8). Diese Verschiebung wird durch eine Mikrometerschraube bewirkt, deren Knopf *G* mit Theilung versehen ist, sodass man leicht die Verschiebung hiermit abmessen kann. Der Ring *B* sowohl wie der Fuss *F* sind ferner noch auf ihrer Unterseite, wie aus der Figur ersichtlich, mit Schrauben und federnden Kautschukringen versehen, damit ihre Bewegung eine recht sichere sei. Der Fuss trägt die Säule *Q* und diese wieder die durchbohrte und auf ihrer Oberseite mit einer conischen Erhöhung versehene Platte *H*. Auf letzterer dreht sich um den Conus eine zweite geschlitzte Platte *J*, in deren Schlitz der eigentliche Objecttisch *K* eingeschoben werden kann. Derselbe besteht aus einer dünnen kreisförmigen Platte, welche durch zwei kurze Säulen auf einem in den Schlitz von *J* passenden durchbohrten und mit abnehmbarem Griff versehenen Metallstück befestigt ist. Je nach der erforderlichen Temperatur, der Grösse und Form der zu untersuchenden Objecte können indess verschieden gestaltete Objecttische aufgesteckt werden.

So z. B. reducirt sich bei Versuchen mit glühenden Schmelzflüssen der ganze Objecttisch auf ein sehr dünnes, rundes, nur in der Mitte mit einer recht kleinen Oeffnung versehenes Metallplättchen, welches von zwei verhältnissmässig hohen und dünnen Säulen getragen wird, um keine zu grossen Wärmeverluste herbeizuführen. Noch besser wird der kleine Objectträger zwischen zwei Metallplättchen eingeschoben, von welchen sich das obere abheben lässt (Taf. III Fig. 9). Es ist in diesem Falle nöthig, die Linsen des Mikroskops zu schützen, was für die meisten Fälle ausreichend durch eine mit kleiner Oeffnung versehene ziemlich dicke und grosse Kupferscheibe *L* geschieht, die durch das Stativ *M*, an welchem sie sich auf- und abschieben lässt, gehalten wird. Für Arbeiten bei sehr hohen Temperaturen wird dieselbe zweckmässig hohl angefertigt und während der Beobachtung durch einen hindurchfliessenden Strom kalten Wassers auf niedriger Temperatur gehalten. In Taf. III Fig. 4, welche das Instrument von oben gesehen darstellt, sieht man die zwei Oeffnungen *a*, *b* der Fussplatte, durch welche die wasserzuführenden Schläuche aufsteigen. Die Erwärmung der Objecte wird durch eine kleine nichtleuchtende Flamme einer Mischung von Gas und Luft, welche dem gläsernen Brenner *N* entströmt, hervorgebracht und kann nicht allein durch Kleinstellen der Flamme, sondern auch noch durch den Schieber *O* gemässigt werden, welcher aus einem in Messingfassung befestigten Deckgläschen oder Glimmerblättchen besteht und längs des Drahtes *P* verschoben werden kann. Der Brenner sowohl wie der den Schirm tragende Draht sind in eine metallene Säule eingesetzt (Taf. III Fig. 10), welche an ihrem unteren Ende durch ein rechtwinklig angesetztes Seitenrohr *a* mit der Gasleitung communicirt. Diese Höhlung biegt oben rechtwinklig in die Brennerrohre um und kann daselbst durch eine conisch zulaufende, von oben eingesetzte Schraube *b* verstopft werden. Die ganze Höhlung ist der Länge nach bis zur Biegung von einer dünnen Röhre durchzogen, welche bestimmt ist, die zur Zerstörung der Leuchtkraft der Flamme nöthige Luft zuzuführen und mit einem luftgefüllten Gasometer in Verbindung steht, welcher von Zeit zu Zeit mittelst eines Wassergebläses

neu gefüllt wird. Die Säule ist in der Fussplatte nicht fest eingeschraubt, sondern unten conisch verjüngt, in die entsprechende Bohrung der Platte eingeschliffen und vermittelst Schraubenmutter und Kautschukring nur mässig fest angezogen, sodass sie sich leicht mittelst des Zapfens *c*, welcher als Handgriff dient, um ihre Axe drehen lässt. Durch eine Arretirung, hervorgebracht durch zwei bei der Drehung auf einanderstossende Stifte *d*, *d* ist dafür gesorgt, dass die Drehung sich soweit ausführen lässt, bis die Flamme genau mitten unter der Oeffnung des Objecttisches steht, sodass beim Untersetzen der Flamme alle Vorsichtsmassregeln bezüglich der richtigen Stellungen überflüssig werden.

Soll eine genau bestimmte, mittelst des Thermometers controlirbare Temperatur erzeugt werden, so wird ein hohler, in seinen Oeffnungen durch Glasplatten verschlossener Objecttisch angewandt, welcher durch Röhren mit einer Druck- oder Centrifugalpumpe in Verbindung steht, die fortwährend einen Strom heissen Wassers oder Oels von genau regulirbarer Temperatur hindurchtreibt. In diesem Falle dient die obere möglichst dünne Verschlussplatte des Objecttisches zu gleicher Zeit auch als Objectträger, was nöthig ist, um das Präparat auf annähernd gleiche Temperatur mit dem durchströmenden Wasser oder Oel zu bringen. Eine kleine Differenz wird sich selbstverständlich immer finden, ist indess ohne alle Bedeutung, da sich durch controlirende Versuche, z. B. Aufbringen einer Substanz von bekanntem Schmelzpunkt, ihrem Werthe nach genau ermittelt werden kann. Die Zuleitungsröhren können in zwei Einsätze der Fussplatte (Taf. III Fig. 4, *c*, *d*) befestigt und dann unter dem Tische weitergeführt werden, sodass sie in keinerlei Weise die Beobachtung stören. Statt dieser Röhren können in diese Oeffnungen der Fussplatte indess auch andere Stücke eingesetzt werden, z. B. isolirende Säulen mit grossen Quecksilbernäpfen für electrolytische Versuche, Spitzen für Experimente über electriche Entladung u. dergl. Die Beleuchtung der Objecte kann auf zweierlei Art geschehen, entweder durch den Glassatz *Q* (Taf. III Fig. 3), welcher das Licht einer passend angebrachten Gaslampe *X*, deren Dämpfe durch den

Kamin Y entweichen, genau unter dem Polarisationswinkel nach oben auf die Sammellinse R reflectirt, oder mittelst des Hohlspiegels W (Taf. III Fig. 7), welcher durch den leicht zu entfernenden Arm T getragen wird, oder endlich mittelst eines in der Figur nicht angegebenen Glassatzes, welcher an die Stelle des Spiegels W gesetzt werden kann, und der sein Licht durch den verstellbaren Planspiegel S erhält. Die erste Art der Beleuchtung ist die bequemste, und die beiden letztgenannten dienen nur dazu, um auch eventuell das Tageslicht zur Beleuchtung benutzen zu können. Der grosse Vorzug der ersteren Beleuchtung besteht hauptsächlich darin, dass man stets im polarisirten Licht von genügender und gleichbleibender Stärke arbeitet und jederzeit, selbst während des Erwärmens, sofort mit Hülfe eines auf das Ocular gesetzten Nicol'schen Prismas die Schwingungsrichtungen der Krystalle bestimmen kann. Da diese Operation bei vergänglichen Producten oft sehr rasch ausgeführt werden muss, überhaupt sich im Laufe einer Untersuchung sehr häufig wiederholt, ist dieses Nicol'sche Prisma an einem passend verschiebbaren Arm (Taf. III Fig. 2a) angebracht, welcher sich je nach der Stellung des Tubus an der Säule b höher oder tiefer stellen lässt. Diese Säule ist in ihrem unteren Theile der Länge nach durchbohrt und in der Mitte mit einer Verdickung versehen, in welcher sich die innere Höhlung rechtwinkelig umbiegt und nun seitlich in ein abnehmbares, verjüngt zulaufendes, abwärts gebogenes Ansatzrohr c ausläuft. Auf der der Mündung entgegengesetzten Seite ist eine conisch zugespitzte Schraube eingesetzt, welche gestattet, die Höhlung zu verschliessen und somit der durchströmenden Luft, für welche den Canal gebohrt ist, den Ausgang zu versperren. Dieser Luftstrom wird von einem Wassertrommelgebläse geliefert, durch einen Kautschukschlauch in die Höhlung hineingeleitet, und falls letztere nicht vermöge der Schraube geschlossen ist, durch das erwähnte Ansatzrohr schief von oben herab geradezu auf das Object getrieben, um dasselbe abzukühlen. Es ist mittelst dieser Einrichtung noch eine weit feinere und raschere Einstellung der Temperaturgrade möglich, als mit-

telst des an dem Brenner angebrachten Schirmes, welcher bereits oben beschrieben wurde.

Um Krystallwinkel oder die Neigung der Schwingungsrichtungen gegen die Krystallkanten messen zu können, ist das Ocular des Mikroskops mit einem Fadenkreuz versehen, welches der Polarisationsebene des Glassatzes entsprechend orientirt ist. Zur Ausführung der Messungen ist gewöhnlich nöthig, dass eine Ecke des Krystalles genau unter den Kreuzungspunkt der Fäden zu liegen komme. Es wird dies bewirkt durch die früher beschriebene Mikrometerschraube, und zwar wird der betreffende Eckpunkt, während die Schraube einem der Fäden parallel steht, zunächst unter den anderen Faden gebracht, hierauf vermittelst der ebenfalls beschriebenen Vorrichtung das Object um 90° gedreht und wieder mittelst der Schraube verschoben, bis auch die Deckung mit dem zweiten Faden eintritt. Für Untersuchungen bei höheren Temperaturen kann in die Drehvorrichtung ein längerer Hebel eingeschraubt werden, da dieselbe so heiss werden kann, dass ein unmittelbares Berühren mit den Fingern nicht mehr möglich ist.

Beim Drehen des Ganzen ist es natürlich durchaus nöthig, dass die Drehaxe des Objecttisches genau durch den Kreuzungspunkt der Fäden hindurchgehe. Um dieses zu erzielen, ist der Querbalken des Γ -förmigen Armes nicht fest an der verticalen Säule angebracht, sondern nur vermittelst einer Schraubenmutter fest angezogen, was indess die Stabilität des Ganzen durchaus nicht beeinträchtigt. Um ihn nun in der erwähnten Weise zu justiren, ist die Oeffnung, durch welche die Spindel der Befestigungsschraube hindurchgeht, ziemlich beträchtlich grösser und letztere selbst unten vierkantig angefeilt. Gegen die Flächen dieses vierseitigen Prismas drücken vier Schrauben, welche in 4 um 90° von einander entfernten Stellen seitlich in den Querbalken eingesetzt sind. Wie aus der Taf. III Fig. 10 ersichtlich ist, lässt sich durch passende Einstellung derselben die gewünschte Justirung leicht ausführen.

Um endlich auch die Form der Objecte fixiren zu können, ist hinter dem Mikroskop in schiefer Lage ein Zeichenbrett

(Ta
Nac
Abz
rasc
gese
nach
nich
eine
sätz
noch
nöth
u. d
ich
richt
lasse
eins
Plat
dure
des C
als F
des
dass
könn
Klar
strat

bene
tion
stalt
meist
schon
neue
gar v
chemi
falls
stanz
kannt
passer

(Taf. III Fig. 3 U) aufgestellt, auf welches mittelst zweier Nadeln ein Blatt Papier aufgespannt wird. Gelangt ein der Abzeichnung würdiges Object in das Gesichtsfeld, so wird rasch ein kleines dreiseitiges Zeichenprisma auf das Ocular gesetzt und nun in bekannter Weise die Contour des Objectes nachgezeichnet. Damit die Arme während des Zeichnens nicht ermüden und auch sonst während des Experimentirens eine feste Stütze haben, sind auf der Tischplatte zwei Aufsätze (Taf. III Fig. 2, z, z) angebracht, welche gleichzeitig noch dem weiteren Zwecke dienen, Schubladen mit den nöthigen Chemikalien, Objectträgern, Reinigungsutensilien u. dergl. aufzunehmen. Die Objecte zu photographiren, habe ich bis jetzt noch nicht versucht, indess bereits eine Vorrichtung angebracht, welche wohl dazu genügen dürfte. Es lassen sich nämlich in die Fussplatte zwei eiserne Säulen einsetzen, welche oben die zur Aufnahme der empfindlichen Platte dienende dunkle Kammer tragen. Ersetzt man erstere durch eine matte Glastafel, so entsteht darauf eine Projection des Gegenstandes, welche durch Anwendung eines Skioptikons als Beleuchtungslampe und eines gewöhnlichen Spiegels statt des Glassatzes hinreichend deutlich gemacht werden kann, dass mehrere Beobachter dieselbe gleichzeitig wahrnehmen können. Selbstverständlich kommt ein so projecirtes Bild an Klarheit nie dem direct gesehenen gleich, allein Demonstrationen wachsender Krystalle sind kaum anders auszuführen.

Bedenkt man nun, wie leicht es ist, mittelst des beschriebenen Apparates alle zur Krystallanalyse nöthigen Operationen auszuführen, wie bequem sich die Untersuchung gestaltet, da das zeitraubende Abdampfen, Filtriren u. s. w. meistens fortfällt, wie geringe Quantitäten von Reagentien schon hinreichend sind, so lässt sich vermuthen, dass sich die neue Untersuchungsmethode recht bald Bahn brechen und gar viele Schwierigkeiten beseitigen werde, die bisher der chemischen Analyse im Wege standen. Freilich ist hierzu, falls es sich um die Analyse einer noch völlig fremden Substanz handelt, erst eine gründliche Untersuchung aller bekannten chemischen Verbindungen nöthig und alsdann eine passende schematische Zusammenstellung der Resultate und

Auswahl der geeignetsten zur Aufstellung eines bestimmten Ganges der Analyse.

Mit einigen wenigen Substanzen habe ich bereits Untersuchungen in der dargelegten Absicht vorgenommen und die Resultate in Form kleiner Notizen in der Zeitschrift für Krystallographie veröffentlicht, doch ist es dem einzelnen unmöglich, das ganze Gebiet zu bearbeiten, und möchten deshalb diese Zeilen dazu beitragen, auch andere für die besprochene Arbeit zu gewinnen, damit es in nicht allzuferner Zeit möglich werde, ein bestimmtes praktisch verwerthbares System der Krystallanalyse thatsächlich aufzustellen.

Handelt es sich nur um die einfachere, aber immerhin für die Praxis oft sehr wichtige Entscheidung darüber, ob ein gegebener Stoff wirklich derjenige ist, für welchen er gehalten wird oder gehalten werden soll, so kann die Krystallanalyse schon jetzt in ihrem noch völlig unentwickelten Zustande rasch zum gewünschten Resultate führen, da es nur nöthig ist, die beiden zu identificirenden Stoffe nach einander und genau unter denselben Bedingungen entweder kalt oder warm, rein oder mit anderen Stoffen verbunden auf die Form der Krystalle zu prüfen und zu vergleichen. Eine etwaige Verschiedenheit wird dem einigermaßen geübten Auge sehr bald auffallen und unter Umständen sofort jede weitere Untersuchung überflüssig machen.

VII. *Ueber die bei der Bildung von Haloidsalzen beobachtete Contraction im Vergleich mit der Bildungswärme derselben;*
von W. Müller-Erbach.

Für die Chlor-, Brom- und Jodverbindungen der Metalle hatte ich in einer früheren Arbeit¹⁾ nachgewiesen, dass die chemische Verwandtschaft, so weit sie bekannt ist, mit den

1) Müller-Erbach, Pogg. Ann. 139. p. 287. 1870.

Aenderungen des Volumens der Componenten bei der Bildung gleichartiger Salze derartig correspondirt, dass die Gesamtmasse stets da die grössere Zusammenziehung erfährt, wo die Verwandtschaft eine grössere ist. In manchen Fällen war jedoch über die relative Grösse der chemischen Verwandtschaft nicht bestimmt zu entscheiden, und ich habe deshalb aus den in den letzten Jahren zahlreich ausgeführten Versuchen über die Wärmetönungen bei der Bildung von chemischen Verbindungen neues Material gesammelt, um Contraction und chemische Anziehung zu vergleichen. Als absolutes Maass für die Verwandtschaft können die Bildungswärmen zwar nicht angesehen werden¹⁾ und für die Sauerstoffverbindungen z. B. der Alkalimetalle und der alkalischen Erdmetalle ergeben sie ein von dem allgemein angenommenen abweichendes Resultat, aber meistens stimmen sie mit den Ergebnissen anderer Verwandtschaftsbestimmungen überein, und sie sind als erster Anhalt für die Beurtheilung der Verwandtschaft jedenfalls von hervorragender Wichtigkeit.

In die folgende Zusammenstellung sind nun der vollständigen Uebersicht wegen alle Chlor-, Brom- und Jodmetalle aufgenommen, für welche die zur Vergleichung nöthigen Angaben gefunden wurden. Die Salze sind in sechs Gruppen geordnet, in Verbindungen der Alkalimetalle und der alkalischen Erdmetalle, der Zink- und der Quecksilbergruppe, in unlösliche Salze und in ungesättigte Verbindungen. Die letzte Gruppe ist wegen der Abweichung in der Bestimmung der Bildungswärme unterschieden. Die Volumina der Metalle und der Salze sind meistens nach den neuesten Bestimmungen angegeben, wo sich grössere Abweichungen fanden, sind diese durch Doppelangaben hervor gehoben. Die Volumina des festen Broms und Chlors sind dem des festen Jods 25,65 gleich gesetzt, nähme man statt dessen die für die flüssigen Elemente wirklich beobachteten Werthe, so wird dadurch das schliessliche Ergebniss nicht wesentlich geändert.²⁾

1) Müller-Erzbach, Chem. Ber. **13**. p. 1659. 1880.

2) Ders., Pogg. Ann. **139**. p. 139. 295. 1870.

Ver- bindung	V ₁ Summe der Volumina der Bestandtheile	V ₂ Gefundenes Volumen der Verbindung	Beobachter	Con- traction $\frac{V_1 - V_2}{V_1}$	Bildungs- wärme	Beobachter
2 KCl	90,8 + 51,3 = 141,6	76,7	Kopp	0,46	210	Thomsen
2 K Br	—	198,7	Karsten	0,30	192,6	"
—	—	188,2	Schröder	0,37	—	"
2 KJ	—	107,4	Boullay, Schröder	0,24	160	"
2 NaCl	47,3 + 51,3 = 98,6	54,4	Kopp	0,45	194,6	"
2 NaBr	—	66,9	Kremers, Schröder	0,32	173,2	"
2 NaJ	—	86,9	Filhol	0,12	137,6	"
2 LiCl	23,6 + 51,3 = 74,9	42,4	Kremers	0,43	187,6	"
2 LiBr	—	56,5	Clarke	0,25	—	"
2 LiJ	—	77	"	-0,03	—	"
BaCl ₂	34 + 51,3 = 85,3	53,9	Boullay, Schröder	0,37	194,3	Thomsen
—	46 + 51,3 = 97,3	—	—	0,44	—	"
BaBr ₂	—	65,5	Kremers	0,23	169,5	"
BaJ ₂	—	79,5	Filhol	0,07	—	"
SrCl ₂	34,4 + 51,3 = 85,7	56,5	Karsten	0,34	184,6	"
—	—	54	Hermann	0,37	—	"
—	—	50,2	Schröder	0,41	—	"
SrBr ₂	—	62,5	Bödeker	0,27	157,7	"
SrJ ₂	—	77,6	"	0,09	—	"
CaCl ₂	25,4 + 51,3 = 76,7	51,1	Boullay	0,33	170,2	"
CaBr ₂	—	60,6	Bödeker	0,21	141,3	"
—	—	62,0	Schröder	—	—	"
MgCl ₂	12,9 + 51,3 = 64,2	43,7	Playfair u. Joule	0,32	151	"
ZnCl ₂	9,2 + 51,3 = 60,5	49,4	Schröder	0,19	97,2	Thomsen
ZnBr ₂	—	61,8	Bödeker	—	—	Berthelot
—	—	59,0	Schröder	0,02	86,2	Thomsen
ZnJ ₂	—	68,0	Bödeker u. Giesecke	-0,13	60	"
MnCl ₂	7,6 + 51,3 = 58,9	50,2	Schröder	0,15	112	"
FeCl ₂	7,2 + 51,3 = 58,8	50,2	Filhol	0,14	82,1	"
NiCl ₂	6,7 + 51,3 = 58	50,6	Hermann	0,13	74,5	"
CdCl ₂	13,0 + 51,3 = 64,3	50,4	Schröd., Böd. u. Gies.	0,22	93,2	Thomsen
—	—	46,5	Knight (Clarke)	0,27	—	"
CdBr ₂	—	56,7	Bödeker u. Giesecke	0,12	76	Berthelot
CdJ ₂	—	61	M. Fullert (Clarke)	0,05	45	"
HgCl ₂	14,7 + 51,3 = 66	51,1	Hermann	0,23	63,2	Thomsen
—	—	49,7	Schröder	0,25	—	"
HgBr ₂	—	60,8	Karsten	0,08	52,6	"
—	—	63,2	Beamer (Clarke)	0,04	—	"
HgJ ₂	—	71,8	Boullay, M. Owens	-0,09	34,4	"
CuCl ₂	7,1 + 51,3 = 58,4	50,6	Schröder	0,13	51,6	"
—	—	44	Playfair u. Joule	0,25	—	"

Verbindung	V ₁ Summe der Volumina der Bestandtheile	V ₂ Gefundenes Volumen der Verbindung	Beobachter	Contraction $\frac{V_1 - V_2}{V_1}$	Bildungswärme	Beobachter
PbCl ₂	18,1 + 51,3 = 69,4	49,0	Karsten	0,29	85,2	Thomsen
PbBr ₂	—	55,4	"	0,20	68,8	Berthelot
PbJ ₂	—	75,5	Boullay	-0,09	42	"
—	—	68,8	Hermann	0,01	—	"
2 AgCl	20,6 + 51,3 = 71,9	52,6	Karsten	0,27	58,4	Thomsen
2 AgBr	—	59,2	"	0,18	47,2	Berthelot
2 AgJ	—	89,7	Boullay	-0,16	27,6	Thomsen
—	—	—	—	—	21	Berthelot
2 HgCl	29,4 + 51,3 = 80,7	65,4	Boullay	0,19	82,6	Thomsen
—	—	67,2	Karsten	0,17	—	"
2 HgBr	—	76,7	"	0,05	70	Berthelot
2 HgJ	—	85,6	Boullay	-0,06	47,6	Thomsen
2 CuCl	14,2 + 51,3 = 65,5	53,8	Schröder	0,18	65,8	"
2 CuBr	—	60,9	Bödeker	0,07	50,0	"
2 CuJ	—	86,8	—	-0,32	32,5	"

Zwölf vollständige dreigliedrige Gruppen von Chlor-, Brom- und Jodmetallen zeigen übereinstimmend für Chlor die grösste, für Jod die geringste Contraction wie Bildungswärme, nur für Lithium, Barium und Strontium fehlen einige Angaben über Bildungswärmen. Die Contraction ändert sich demnach bei demselben Metall mit der Bildungswärme zugleich ohne irgend eine Ausnahme in 36 verschiedenen Fällen in gleichem Sinne mit der auf andere Weise ermittelten chemischen Verwandtschaft. Die Regelmässigkeit der grössten Contraction für die Chlor-, der mittleren für die Brom- und der kleinsten für die Jodverbindung hat sich ausserdem überall da wiederholt, wo bei anderen unter sich ähnlich constituirten Verbindungen die Vergleichung möglich war. Für die Salze der drei Halogene hatte ich deshalb den Satz aufgestellt, dass dasjenige die Bestandtheile fester gebunden hält, bei dessen Bildung die grössere Verdichtung stattgefunden hat.¹⁾ Dieser Satz wird durch das thermische Verhalten der Salze vollständig bestätigt, wie das auch Hr. Berthelot in seinem Essai de mécanique chimique bereits ausgesprochen hat.

¹⁾ Müller-Erbach, Pogg. Ann. 139. p. 299. 1876.

Die Bedeutung der Contractionen reicht jedoch noch weiter. Betrachtet man die Salze innerhalb der einzelnen Gruppen, so folgen sich für die Verbindung mit Chlor bei den Alkalimetallen Kalium, Natrium und Lithium nach der Contraction wie nach der Bildungswärme, bei den alkalischen Erdmetallen ebenso Barium, Strontium, Calcium und Magnesium, bei der Zinkgruppe Zink, Mangan, Eisen, Nickel, bei der Quecksilbergruppe Cadmium, Quecksilber, Kupfer, bei den unlöslichen Salzen Blei und Silber und bei den Chlorüren Quecksilber und Kupfer. Im ganzen stimmt in 19 Fällen die grössere Contraction mit der grösseren Bildungswärme überein, nur Zink und Mangan bilden eine Ausnahme von nicht bedeutender Abweichung. Für die Bromverbindungen zeigt sich unter sieben Fällen eine Ausnahme von noch geringerer Abweichung in dem Verhältniss von Hg Br und Cu Br , und die Jodverbindungen weisen ebenfalls noch vier übereinstimmende Fälle auf. Demnach ist innerhalb der Gruppen die Reihenfolge der chemischen Verwandtschaft bei 30 unter 32 Fällen nach der Contraction dieselbe wie nach der Verbindungswärme, und nur in zwei Fällen zeigt sich eine Abweichung, die innerhalb der Grenzen liegt, welche die verschiedenen Bestimmungen, namentlich der specifischen Gewichte, der vorliegenden Vergleichung anweisen. Speciell für die Haloidsalze der schweren Metalle sind diese Grenzen sehr weit, wie z. B. die Doppelangaben für die Volumina von Cd Cl_2 — 50,4 und 46,5 —, Cu Cl_2 — 50,6 und 44 — oder Pb J_2 — 75,5 und 68,8 — beweisen.

Man kann nun weiter noch die Salze jeder einzelnen Gruppe mit den gleichartigen aller anderen Gruppen vergleichen, dann ist die Möglichkeit der Zusammenstellungen erschöpft und damit die Vergleichung allgemein durchgeführt. Chlorkalium und Chlornatrium zeigen gegen 15 Chlormetalle der folgenden Gruppen die stärkere Contraction, und die grössere Bildungswärme, für Chlorlithium ist gegen Chlorbarium wegen des zweifelhaften Volumens von Barium nicht zu entscheiden, aber die 14 übrigen Fälle folgen der früheren Regel. Dasselbe gilt von den vier Chlormetallen der alkalischen Erden gegenüber den 11 Chlormetallen der letzten

Gruppen, sodass zusammen in 88 Fällen Contraction und Bildungswärme unter sich und mit der allgemein angenommenen chemischen Verwandtschaft correspondiren. In den vier letzten der gebildeten Gruppen, bei den schweren Metallen, weichen die Contractionen und die Bildungswärmen von Gruppe zu Gruppe und in gleicher Weise innerhalb der einzelnen Gruppen nicht so stark von einander ab, dass man bei den in weiten Grenzen schwankenden Bestimmungen des Volumens zuverlässige Vergleichsresultate erwarten könnte. Deshalb ist es auch nicht zu entscheiden, ob der Gruppencharakter dieser Metalle auf die Contractionen und die Bildungswärmen einen allgemeinen Einfluss ausübt oder nicht. Die beiden letzten Gruppen der im Wasser unlöslichen oder schwerlöslichen Salze zeigen zwar verhältnissmässig starke Contractionen und grosse Bildungswärmen, aber zu einem sicheren Schlusse ist doch die Zahl der Beispiele zu klein. Die grössere Unsicherheit der Zahlen für die Volumengrösse von den Haloidsalzen der schweren Metalle nöthigt consequenter Weise dazu, auch von den oben genannten 32 Beispielen über die Verwandtschaftsgrösse innerhalb der einzelnen Gruppen 17 zu streichen, sodass nur 15 übrig bleiben. Diese 15 zeigen ohne Ausnahme bei grösserer Contraction eine grössere Bildungswärme.

Dieselbe Uebereinstimmung findet sich ausserdem noch für 41 Fälle von Bromverbindungen, wenn man die nach ihrer Verwandtschaft stark abweichenden Salze der Alkalimetalle mit denen der alkalischen Erden und der schweren Metalle sowie die beiden letzteren unter sich vergleicht. Auch für Jodverbindungen von leichten und schweren Metallen liegen soviel Bestimmungen vor, dass man an 14 Fällen jene Uebereinstimmung constatiren kann.

Für die starren Metallverbindungen des Chlors, Broms und Jods stellt sich demnach als schliessliches Resultat heraus, dass in 36 Beispielen die Contractionen wie die Bildungswärmen nach der Abstufung Chlor, Brom und Jod abnehmen. Ebenso war in 158 Fällen von unter sich verglichenen Chlorverbindungen, sowie von Brom- und Jodverbindungen die chemische Verwandtschaft in dem-

selben Sinne veränderlich, wie die Raumverminderung und die bei der Bildung frei werdende Wärmemenge. Zusammen können also nicht weniger als 194 Beispiele als Beweis dafür angeführt werden, dass im Kreise der hier verglichenen drei Arten von Haloidsalzen der grösseren Massenverdichtung überall die nach der Bildungswärme bestimmte grössere Verwandtschaft entspricht. Man kann sich die einzelnen Verbindungen von den schweren Metallen bis zum Kalium in fortlaufender Reihe durch Substitution zersetzt denken, und es würde sich dann ergeben, dass die Umsetzungen stets in derjenigen Richtung erfolgen, in welcher die grössere Verdichtung möglich ist; durch die auf einander folgenden chemischen Processe würde demnach die Gesamtmasse auf einen immer kleineren Raum zusammengedrängt. Der Mechanismus des chemischen Processes ist bei den Haloidsalzen an den Raumveränderungen in verschiedener Richtung genau zu verfolgen.

VIII. *Automatische Quecksilberluftpumpe; von Alois Schuller.*

(Vorgetragen in der ung. Acad. der Wiss. am 14. März 1881.)

Bei der Construction der im Nachfolgenden beschriebenen Quecksilberluftpumpe waren zwei Gesichtspunkte massgebend, einerseits ein möglichst vollkommenes Vacuum zu erzeugen, andererseits die Handhabung der Pumpe zu vereinfachen. In Anbetracht des ersten Zweckes wurden aus dem wesentlichen Theile der Luftpumpe alle gefetteten Glasverbindungen ausgeschlossen und der hermetische Verschluss nur durch Glas und Quecksilber bewerkstelligt. In Anbetracht des zweiten Zweckes wurde die Luftpumpe mit einer Steuerung versehen, die die Person des Experimentirenden ersetzt.

Der untere Theil des Apparates besteht aus einer dreihalsigen, theilweise mit Quecksilber gefüllten Flasche A (Taf. III Fig. 12); an die in den mittleren Hals eingeschlifene

Röhre, die fast bis an den Boden der Flasche reicht und immer unter Quecksilber mündet, ist die Kugel *B* angeschmolzen; diese ist einerseits mittelst der Trockenröhre *C* mit dem zu evacuierenden Raume *E*, andererseits auf dem Wege *Vk, k* mit einer Wasserluftpumpe oder einer anderen Hilfspumpe bleibend verbunden. Dieselbe Hilfspumpe, die nur eine unvollständige Evacuierung zu bewerkstelligen hat, kann mittelst des Dreiweghahnes *D* und der Kautschukröhre *k₂* auch aus der Flasche *A* pumpen.

Verschliessen wir vorerst den dritten Hals der Flasche *A*, so können wir folgendermassen evacuiren.

Während der Dreiweghahn die in Taf. III Fig. 13 dargestellte Stellung einnimmt, evacuirt die Hilfspumpe sowohl die Kugel *B* und damit den zu evacuierenden Raum *E* als auch die Flasche *A*, ohne dass sich hierbei in letzterer der Stand des Quecksilbers ändern würde.

Bringen wir jedoch den Dreiweghahn *D* in die in der Taf. III Fig. 14 dargestellte Stellung, so unterbrechen wir die Verbindung der Hilfspumpe mit der Flasche *A* und setzen diese mittelst der engen Oeffnung *K* mit der atmosphärischen Luft in Verbindung. Die in die Flasche *A* einströmende Luft presst das Quecksilber in die Kugel *B*, dieses trennt, bei *C* angekommen, den zu evacuierenden Raum von der Luftpumpe, hebt bei *V₁* das dort liegende, am zweckmässigsten dreieckige Glasplättchen, und verschliesst mittelst desselben das abgeschliffene Ende der darüber befindlichen Röhre. In der Kugel *B* weitergehoben, verdrängt das Quecksilber die darin befindliche verdünnte Luft, hebt endlich auch das Glasplättchen *V*, um auch mit diesem die darüber befindliche abgeschliffene Röhre zu verschliessen. Drehen wir nun den Hahn *D* wieder in seine frühere Stellung (Taf. III Fig. 13), so wird die Hilfspumpe die in die Flasche *A* eingedrungene Luft wieder aus derselben entfernen, also das Quecksilber aus der Kugel *B* herabsinken; das Glasplättchen *V* und der unter demselben zurückbleibende Quecksilberring bewirken einen luftdichten Verschluss, sodass in der Kugel *B* ein luftleerer Raum entsteht, der

mit dem zu evacuierenden Raume communicirt, sobald das Quecksilber bis unter c gesunken ist.

Die Drehung des Dreiweghahnes bewerkstelligt nun die Steuerung, welche der Quecksilberluftpumpe nachgebildet ist. — (Dieselbe ist in Taf. III Fig. 12 durch ihre feineren Conturen erkenntlich.) Der obere Theil derselben ist wie bei der Quecksilberluftpumpe bleibend mit der Hülfpumpe in Verbindung, während der untere Raum a mit dem dritten Halse der Flasche A verbunden ist, also abwechselnd mit der Hülfpumpe und der atmosphärischen Luft communicirt.

In dem oberen Theil der Steuervorrichtung befindet sich ebenfalls ein luftdicht schliessendes Ventil v , welches das Steigen des Quecksilbers so lange zulässt, bis das Glasplättchen die obere abgeschliffene Röhre d erreicht und verschliesst. — Der wesentliche Unterschied zwischen der Luftpumpe selbst und der Steuervorrichtung besteht darin, dass das untere Gefäss a der letzteren beweglich ist, indem es an einem über eine Rolle gelegten Faden f_1 hängt, dessen anderes Ende am unteren Theile des Kreisbogens befestigt ist, der seinerseits mit dem Dreiweghahn in fixer Verbindung steht und das eigentliche Steuer bildet. An das obere Ende dieses Kreisbogens ist ein zweiter Faden f_2 befestigt, an dem ein Gewicht G hängt, das die Kugel a im Gleichgewicht hält, wenn der Regulator bis zu dem mit v bezeichneten Punkte mit Quecksilber gefüllt ist. — Die zum Gefäss a führenden Kautschukröhren k_3 und k_4 sind der grösseren Beweglichkeit halber nur strohhalm dick; um sie dem atmosphärischen Druck gegenüber trotzdem widerstandsfähig zu machen, sind in dieselben Spiralen aus dünnem Stahldraht eingeführt.

Die Wirkung der Steuerung werden wir uns nun leicht vergegenwärtigen können; wenn nämlich die Hülfpumpe aus dem oberen und unteren Theile sowohl der Quecksilberluftpumpe als auch des Regulators die Luft entfernt, sinkt im Regulator das Quecksilber, wodurch das an der Rolle hängende Gefäss a schwerer wird. — Sobald das Quecksilber auch aus der Kugel b theilweise nach a übergeflossen ist, sinkt diese so tief, als es der Faden f_3 gestattet, und dreht hierbei

den Dreiweghahn. — Nun strömt die Luft in die Gefässe A und a , das Quecksilber wird also wieder gehoben, die Kugel a wird leichter, und während das Quecksilber in der Steuervorrichtung über die mit v bezeichnete Höhe steigt, dreht das Uebergewicht von G den Dreiweghahn wieder in die ursprüngliche Lage. Von nun an wiederholt sich der besprochene Hergang.

In Betreff der Dimensionen der Steuervorrichtung müssen die in Fig. 12 Taf. III mit gleichen Buchstaben bezeichneten Höhen H , H und h , h wenigstens annähernd gleich sein. Um den Regulator so einzustellen, variirt man nach Bedarf entweder die obere fixe Unterstützung des Regulators oder die der Rolle oder endlich die Höhe der unter dem Gewichte G angebrachten Unterlage.

Ausser dem bereits Angeführten enthält die Quecksilberluftpumpe noch einige wesentliche Bestandtheile, ohne denen sie Erschütterungen ausgesetzt wäre, die ihren Bestand gefährden könnten. Hierher gehört die mit K bezeichnete enge Oeffnung, durch welche die Luft nur langsam zum Dreiweghahn und in die Flasche A gelangt, wodurch ein übermässig rasches Steigen des Quecksilbers verhindert wird; ferner das ohne Quecksilber, also unvollkommen schliessende Ventil u , welches der Luft zwar freien Ausgang gestattet, dieselbe aber nur langsam zurückströmen lässt; ohne diesem würden die Ventile V und v heftig an die darunter befindlichen abgeschliffenen Glasröhren prallen.

Erwähnenswerth ist noch, dass bei Beginn des Pumpens die aus dem zu evacuierenden Raume in die Pumpe strömende Luft heftige Erschütterungen verursacht. — Um diese zu vermeiden, dreht man den Dreiweghahn ein-, zweimal zurück, noch ehe das Quecksilber zum Ventil V gehoben wurde. Ist das geschehen, so kann der Apparat ganz sich selbst überlassen werden, selbst für den Fall, dass in der Hilfspumpe Störungen eintreten sollten.

Soll das Pumpen eingestellt werden, so ist darauf zu achten, dass die Pumpe mit Quecksilber gefüllt sei, und die Luft Zutritt zum Ventil V habe. — Letzteres erfolgt von selbst, wenn die Verbindungsschläuche nicht luftdicht

schliessen; noch sicherer ist es, die ineinander geschliffenen Stücke über V zu durchbohren (wie dies in Fig. 12 Taf. III angedeutet ist) und im Bedarfsfalle die correspondirenden Oeffnungen übereinander zu drehen.

Will man dann Luft in die ausser Thätigkeit gesetzte Pumpe treten lassen, so ist es rathsam, dies zu thun, nachdem man das Quecksilber unter das mit c bezeichnete Niveau hat sinken lassen. Man entfernt etwa aus dem Trichter bei V_1 das Quecksilber und lockert die Verbindung vorsichtig.

Ein interessanter Theil dieser Luftpumpe ist das bloß aus Quecksilber bestehende Ventil, welches sich über der im Durchmesser 3 mm weiten Oeffnung bei J selbst bildet (Fig. 12 und Fig. 15 Taf. III). — Durch dasselbe ist in der Kugel B ein vollständiges Vacuum selbst für den Fall gesichert, dass am Ventil V ein kleines Luftbläschen haften bliebe.

Eine wesentliche Bedingung der tadellosen Wirksamkeit der Luftpumpe ist, dass die Ventile (V_1 , V und v) quecksilberdicht schliessen. Um dies mit den hiebei verwendeten Ventilen aus Spiegelglas zu erreichen, müssen die Enden der betreffenden Glasröhren eben abgeschliffen sein. Dies erreicht man leicht und sicher mittelst des in Figur 16 Taf. III dargestellten, dem Centrumborher ähnlichen Apparates, der die Schleifplatte dreht und dieselbe nur in einem Punkte, der sich unter der Mitte des abzuschleifenden Röhrenendes befindet, unterstützt. — In Fig. 16 Taf. III ist R das abzuschleifende Röhrenende, S der als Schleifplatte benutzte Spiegelglasstreifen, welcher entweder mit befeuchtetem feinem Smirgel, oder aber mit einer dünn geschliffenen Platte eines harten Schleifsteines versehen ist; T endlich ist der Arm, welcher den Spiegelglasstreifen dreht. Wurde das Ende der Röhre vorher mit freier Hand annähernd eben geschliffen oder gefeilt, so genügen einige Minuten, die Röhre fertig zu schleifen. Die Führung der Ventile, die die so abgeschliffenen Röhrenenden abschliessen, ist nur dann eine sichere, wenn der Theil der Röhre unmittelbar unter der Schliffstelle, wo sich das Ventil bewegt,

cylindrisch ist, nicht aber ausgebaucht, wie solche Glasverbindungen gewöhnlich hergestellt werden.

Endlich müssen noch die ineinander geschliffenen Verbindungstheile erwähnt werden, die, ohne gefettet zu sein, luftdicht schliessen. Fig. 17 Taf. III zeigt, dass der untere der ineinander geschliffenen Theile am oberen Ende über der Schliffstelle noch eine trichterförmige Erweiterung besitzt, in welche ein wenig Quecksilber gebracht wird. Ein Quecksilberring, der 3 bis 4 mm des blanken Glases über der Schliffstelle bedeckt, sichert einen vollkommen hermetischen Verschluss.

Bei den vielen mit dieser Quecksilberluftpumpe bisher gemachten Versuchen, bei tagelangem unausgesetzten Gebrauch, hat dieselbe allen meinen Erwartungen vollkommen entsprochen. — Störungen traten nur ein, wenn das Quecksilber angreifende Gase, z. B. Chlor, Ozon, Phosphorverbindungen gepumpt wurden, wobei das Quecksilber, da das Ventil verunreinigt wurde, in die Trockenröhre gelangte. Doch kann auch diesem vorgebeugt werden, wenn man das ausgepumpte Gas über Quecksilber leitet, ehe es in die Luftpumpe selbst gelangt; oder man kann, um ganz sicher zu sein, bei V_1 eine aufsteigende Röhre von genügender Länge, wie sie in Fig. 12 a Taf. III dargestellt ist, anbringen.

Es muss noch erwähnt werden, dass Luftpumpen ähnlicher Construction, die aber nicht automatisch arbeiten, schon wiederholt veröffentlicht wurden. Namentlich publicirte Neesen eine ähnliche¹⁾, bei der jedoch das Heben des Quecksilbers durch eine Druckpumpe und nur das Sinken desselben durch Saugen bewerkstelligt wird. Ausserdem ist an Stelle des Quecksilberventils J ein allem Anschein nach viel schwereres, unter dem Druck einer beträchtlichen Quecksilbersäule stehendes Ventil angebracht, was nur mit Beeinträchtigung der Verdünnungsgrenze möglich ist. — Derselbe Unterschied ist auch zwischen den oberen Ventilen (V); während nämlich bei Neesen's Luftpumpe ein den

1) Neesen, Wied. Ann. 3. p. 608. 1878.

atmosphärischen übersteigender Druck nöthig ist, um das Ventil zu heben, ist hier der äussere Druck bei weitem kleiner, er entspricht dem Minimum des Druckes, der mit der Hülfpumpe erreicht werden kann. — Das Ventil *V* verursacht anfangs gar keinen Widerstand, da es, durch den darunter befindlichen Quecksilberring gehoben, die in Fig. 18 Taf. III dargestellte Lage einnimmt. Erst später muss das Gewicht des Glasplättchens überwunden werden, wenn das Gas bereits über die Oeffnung gelangt ist, von wo das entstandene Gasbläschen durch den sich alsbald entwickelnden Quecksilberstrom weggefeht wird.

Nachdem constatirt ist, dass der Vorzug einer Quecksilberluftpumpe hauptsächlich darin besteht, dass mittelst derselben ein sehr vollkommenes Vacuum hergestellt werden kann, halte ich den Unterschied zwischen diesen beiden Luftpumpen, trotz der äusseren Aehnlichkeit, für wesentlich.

Der mittelst dieser Quecksilberluftpumpe erreichbare geringste Druck wurde nicht gemessen, weil die gebräuchliche Methode nicht zuverlässig zu sein scheint, doch ist der Grad der Verdünnung daraus zu beurtheilen, dass, als Geissler'sche Röhren evacuirt wurden, selbst das Spectrum des Wasserstoffs vollständig verschwand, und dass schliesslich immer die charakteristischen Linien des Quecksilbers, wenn gleich nur schwach, zum Vorschein kamen. Die Röhre leuchtete in diesem Falle auch in ihrem engsten Theile (0,5 mm im Durchmesser) nur wenig, obgleich ein Ruhmkorff'scher Inductor grösster Qualität mit vier dazu gehörigen Elementen zur Herstellung des Stromes benutzt wurde.

Wurde die Geissler'sche Röhre inzwischen auch erwärmt, so hörten die Entladungen schliesslich ganz auf, erfolgten aber durch die Luft als 10 bis 15 cm lange Funken.

Budapest, den 15. April 1881.

IX. Die Theorie des Sättigungsgesetzes; von Max Planck.

Seitdem die experimentellen Untersuchungen der neueren Zeit es ermöglicht haben, die allgemeine Zustandsgleichung eines in homogenem Zustand befindlichen Gases mit brauchbarer Genauigkeit auch auf den flüssigen Zustand zu erstrecken, ist man auf diese Weise zu einer bestimmten Anschauung der Art des Ueberganges eines Stoffes in homogene Form aus dem dampfförmigen in den flüssigen Zustand gelangt.

Wird nämlich das System der Isothermen auch auf den flüssigen Zustand ausgedehnt, so zeigt sich, dass nur für die oberhalb der kritischen Temperatur gelegenen Temperaturen der Druck mit wachsendem Volumen stets abnimmt, während dagegen für alle tieferen Temperaturen jede Isotherme ein Minimum und ein Maximum des Druckes enthält, zwischen denen der Druck zugleich mit dem Volumen wächst. Eine solche Isotherme wird von gewissen, zur Abscissenaxe (auf der die Volumina gemessen werden) parallelen Geraden in drei reellen Punkten geschnitten, von denen die beiden äusseren dem flüssigen und dem dampfförmigen Zustand, der innere einem labilen Zwischenzustand angehört.

Dieser Umstand kann dazu benutzt werden, um, wenn die allgemeine Zustandsgleichung bekannt ist, sämtliche Bestimmungsstücke des kritischen Zustandes (Temperatur, Druck, Volumen) zu berechnen, indem man diejenige Isotherme bestimmt, welche einen Wendepunkt enthält, für welche also Maximum und Minimum des Druckes zusammenfallen, während dieselben für tiefere Temperaturen verschieden, für höhere aber imaginär sind. Der Wendepunkt entspricht dann dem kritischen Zustand.

So hat zuerst van der Waals¹⁾, dann in der jüngsten

1) v. d. Waals, Over de continuïteit van den gas- en vloeistoofstand. Leiden 1873. Sijthoff.

Zeit F. Roth¹⁾ u. A. für eine Reihe von Dämpfen die Bestimmungstücke des kritischen Zustandes aus der allgemeinen Zustandsgleichung abgeleitet.

Es lässt aber, wie sogleich gezeigt werden soll, die auf empirischem Wege gefundene Zustandsgleichung eine weit allgemeinere Verwerthung zu, als die eben genannte, indem nämlich aus ihr das ganze Sättigungsgesetz in seiner gesamten Ausdehnung, d. h. die Beziehungen zwischen Temperatur, Druck und Volumina des gesättigten Dampfes und der berührenden (gesättigten) Flüssigkeit mit theoretischer Genauigkeit sich allgemein ableiten lassen.

Es entspricht bekanntlich jeder Temperatur, also jeder Isotherme, ein bestimmter Werth des Druckes, welcher dem bei dieser Temperatur gesättigten Dampf (und der gesättigten Flüssigkeit) angehört. Dieser Druck wird dargestellt durch eine gewisse zur Abscissenaxe Parallele, welche die Isotherme in drei Punkten schneidet, und deren Lage durch die Gestalt der Isotherme vollständig bestimmt ist.

Das Gesetz dieser Lage hat van der Waals, wie er l. c: ausdrücklich bemerkt, vergeblich experimentell zu bestimmen gesucht, (auch die neuerdings von ihm beobachteten Gesetzmässigkeiten haben vorläufig nur eine approximative Geltung) und ebensowenig ist dies den früheren theoretischen Untersuchungen von J. Thomson und Maxwell geglückt. Erst Clausius²⁾ hat neuerdings diese Frage wieder theoretisch untersucht und ist dabei wesentlich zu dem nämlichen Resultate gelangt, wie ich in einer fast ganz gleichzeitig erschienenen Abhandlung.³⁾ Indess beschränkt sich Clausius auf eine mehrfache Darstellung in Worten.

In der Fassung, die mir die anschaulichste zu sein scheint, lautet das besagte Gesetz folgendermassen: In jeder Isotherme ist die (zur Abscissenaxe parallele) Gerade, welche den Druck des gesättigten Dampfes darstellt, so gelegen,

1) F. Roth, Wied. Ann. 11. p. 1 ff. 1880.

2) R. Clausius, Wied. Ann. 9. p. 356 ff. 1880.

3) M. Planck, Gleichgewichtszustände isotroper Körper. München 1880. Th. Ackermann.

dass die beiden von ihr und der Isotherme abgegrenzten Flächenräume einander gleich sind.

Die Veranschaulichung dieses Satzes auf graphischem Wege ist überaus einfach. Man sieht ferner unmittelbar, dass hierdurch auch die Volumina des gesättigten Dampfes und der gesättigten Flüssigkeit bestimmt sind.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes steht ausser allem Zweifel, da es sich unmittelbar aus dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie (Satz von der Vermehrung der Entropie) herleitet. Es gilt übrigens nicht nur für das stabile Gleichgewicht bei der Berührung von Dampf und Flüssigkeit, sondern regelt überhaupt ganz im allgemeinen das stabile Gleichgewicht eines Körpers, der sich in zwei oder drei Aggregatzuständen nebeneinander befindet.

Es soll nun zunächst auch der mathematische Ausdruck des Gesetzes kurz angeführt werden. Wenn P den Druck einer homogenen Dampf- oder Flüssigkeitsmasse bezeichnet, so ist P eine bestimmte stetige und eindeutige Function der absoluten Temperatur T und des Volumens der Masseneinheit: v (specifisches Volumen), als welche P durch die allgemeine Zustandsgleichung dargestellt wird.

Dieses vorausgesetzt, ist das Gesetz der Sättigung in folgenden beiden Gleichungen enthalten, wobei v_1 und v_2 die specifischen Volumina des gesättigten Dampfes und der gesättigten Flüssigkeit darstellen, während T als gemeinsame Temperatur gedacht wird:

$$(1) \quad P_1 = P_2,$$

$$(2) \quad \int_{v_2}^{v_1} P \, dv = P_1 (v_1 - v_2).$$

Hierbei sind P_1 und P_2 die den Werthepaaren ($T v_1$) und ($T v_2$) entsprechenden Functionswerthe von P . Das Integral in der zweiten Gleichung ist partiell nach v zu nehmen (bei constantem T). (Die Ableitung dieser Gleichungen findet sich in meiner Abhandlung p. 39 ff.).

Wenn also P allgemein als Function von T und v bekannt ist, lassen sich mittelst dieser beiden Gleichungen

die beiden Grössen v_1 und v_2 (also auch der Druck $P_1 = P_2$) als bestimmte Functionen von T allein berechnen, wodurch dann das Gesetz der Sättigung gegeben ist.

Die Bedingungen des kritischen Zustandes ergeben sich einfach dadurch, dass man v_1 mit v_2 zusammenfallen lässt, woraus die beiden Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial v} = 0, \quad \text{und:}$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0$$

zur Bestimmung von T , v und P im kritischen Zustande hervorgehen.

Hiervon soll nun eine Anwendung auf Kohlensäure gemacht werden, indem aus der hinlänglich zuverlässigen Zustandsgleichung derselben das gesammte Sättigungsgesetz abgeleitet wird. Hierbei scheint mir die von Clausius¹⁾ aufgestellte Zustandsgleichung den Vorzug vor der bekannten van der Waals'schen aus dem Grunde zu verdienen, weil sie sich den neueren Andrews'schen Beobachtungen weit besser anschliesst. Die Clausius'sche Zustandsgleichung für Kohlensäure lautet:

$$(5) \quad P = R \cdot \frac{T}{v - \alpha} - \frac{c}{T(v + \beta)^2}, \quad \text{wobei:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} R = 0,003\,688, \\ c = 2,0935, \\ \alpha = 0,000\,843, \\ \beta = 0,000\,977. \end{cases}$$

Hierbei ist P in Atmosphären ausgedrückt, und v ist für $P = 1$ und $T = 273$ gleich der Einheit angenommen.

Durch Substitution dieses Werthes von P in (1) erhält man:

$$P_1 = \frac{RT}{v_1 - \alpha} - \frac{c}{T(v_1 + \beta)^2} = \frac{RT}{v_2 - \alpha} - \frac{c}{T(v_2 + \beta)^2} = P_2,$$

oder symmetrischer, wenn wir zugleich den Druck des gesättigten Dampfes: $P_1 = P_2$ ein für alle mal mit P bezeichnen:

1) l. c. p. 348.

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{c \cdot [(v_1 - \alpha)(v_2 - \alpha) - (\alpha + \beta)^2]}{T(v_1 + \beta)^2(v_2 + \beta)^2} \\ &= \frac{RT \cdot [(v_1 - \alpha)(v_2 - \alpha) - (\alpha + \beta)^2]}{(v_1 - \alpha)(v_2 - \alpha) \cdot (v_1 + v_2 + 2\beta)} \end{aligned} \right.$$

Hieraus eine Relation zwischen T , v_1 und v_2 :

$$(8) \quad T^2 = \frac{c(v_1 - \alpha)(v_2 - \alpha)(v_1 + v_2 + 2\beta)}{R \cdot (v_1 + \beta)^2 \cdot (v_2 + \beta)^2}.$$

Ferner erhält man aus (2) mit Benutzung von (5):

$$RT \cdot \log \frac{v_1 - \alpha}{v_2 - \alpha} - \frac{c(v_1 - v_2)}{T(v_1 + \beta)(v_2 + \beta)} = P(v_1 - v_2),$$

und wenn man mittelst (7) und (8) P und T eliminirt:

$$(9) \quad \log \frac{v_1 - \alpha}{v_2 - \alpha} = \frac{(v_1 - v_2) \cdot [2(v_1 v_2 - \alpha \beta) + (v_1 + v_2)(\beta - \alpha)]}{(v_1 - \alpha)(v_2 - \alpha) \cdot (v_1 + v_2 + 2\beta)}.$$

Dies sind im ganzen drei voneinander unabhängige Gleichungen zwischen den vier Variablen T , P , v_1 und v_2 , sodass diese dadurch als Functionen einer unabhängigen Variablen erscheinen und als solche berechnet werden können.

Die unabhängige Variable kann T oder jede andere der betrachteten Grössen sein, sie kann aber auch beliebig anders gewählt werden, je nachdem es die Zweckmässigkeit erfordert.

Nun sieht man unmittelbar, dass es für die Rechnung unbequem wäre, wenn man etwa T zur unabhängigen Variablen wählen würde, weil die Berechnung der Werthe von v_1 und v_2 aus den Gleichungen (8) und (9) auf die Lösung einer transcendenten Gleichung zurückführt. Es soll daher die unabhängige Variable anders, und zwar in der Weise gewählt werden, dass sämtliche in Betracht kommende Grössen sich bequem durch sie ausdrücken lassen. Dies erreichen wir durch Einführung der beiden neuen Variablen r und φ , die in folgender Weise definirt sind:

$$(10) \quad v_1 - \alpha = r \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$(11) \quad v_2 - \alpha = r \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Durch v_1 und v_2 sind r und φ bestimmt, und zwar in reeller Weise, da, wie aus der Zustandsgleichung (5) hervorgeht, v niemals kleiner als α werden kann, indem sonst P den Werth ∞ passiren müsste.

Wenn wir nun den Winkel φ als unabhängige Variable ansehen, lassen sich sämmtliche in den Gleichungen vorkommende Variable als Functionen von φ bequem darstellen.

So hat man zunächst durch Einsetzung der Werthe von v_1 und v_2 aus (10) und (11) in (9) folgenden Ausdruck für r :

$$(12) \quad r = \frac{2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi - \sin^2 \varphi \cdot \log \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\log \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi}.$$

Hierdurch sind nun auch v_1 und v_2 mittelst (10) und (11) als Functionen von φ ausgedrückt, ebenso T durch (8) und endlich P durch (7).

Der gesammte Bereich des Sättigungsgesetzes wird durchlaufen, wenn man den Winkel φ von 0° bis 90° wachsen lässt, und v_1 auf den dampfförmigen, v_2 auf den flüssigen Zustand bezieht. Denn für $\varphi = 0$ wird $r = \infty$, $v_1 = \infty$, $v_2 = \alpha$, $T = 0$, $P = 0$. Dies sind die Bedingungen des gesättigten Zustandes für die absolute Temperatur 0. Lässt man nun φ wachsen, so wachsen T , P und v_2 , während r und v_1 beständig abnehmen; d. h. mit steigender Temperatur nimmt der Druck des gesättigten Dampfes zu, während die specifischen Volumina des dampfförmigen und des flüssigen Zustandes sich gegenseitig nähern. Endlich für $\varphi = 90^\circ$ wird

$$r = 4(\alpha + \beta) \quad v_1 = v_2 = 3\alpha + 2\beta$$

$$T^2 = \frac{8c}{27R(\alpha + \beta)} \quad P^2 = \frac{cR}{216(\alpha + \beta)^3}.$$

wodurch der kritische Zustand bestimmt ist. Diese Werthe ergeben sich übrigens auch unmittelbar aus (5), indem man die Wurzeln der Gleichungen (3) und (4) bestimmt.

Würde man φ noch weiter wachsen lassen, so würde nichts wesentlich Neues erhalten werden: v_1 und v_2 würden ineinander übergehen, die Temperatur und der Druck würden wieder abnehmen u. s. w. Es ist also in der That ein reelles

Werthensystem der betrachteten Grössen nur möglich für Temperaturen und Drucke, die unterhalb des kritischen Punktes gelegen sind.

Ich habe die Rechnung für einige Werthe der unabhängigen Variablen φ ausgeführt, indem ich die von Clausius für Kohlensäure angegebenen Werthe der Constanten R, c, α, β , wie sie hier unter (6) mitgetheilt sind, zu Grunde legte, und theile die Resultate in der nachfolgenden Tabelle mit.

Die specifischen Volumina v_1 und v_2 habe ich dabei in absolutes Maass, d. h. bezogen auf Centimeter und Gramm, umgerechnet, indem ich alle in der oben angegebenen Einheit erhaltenen specifischen Volumina noch mit 505,7, dem Volumen in Cubikcentimetern eines Grammes Kohlensäure bei 0°C . und 1 Atmosphäre Druck, multiplicirte.

Die letzte Columnne endlich enthält die den jeweiligen Temperaturen entsprechenden Verdampfungswärmen (unter dem constanten Druck des bei der betreffenden Temperatur gesättigten Dampfes). Die Verdampfungswärme der Masseneinheit: λ berechnet sich bekanntlich aus der Gleichung:

$$\lambda = T \cdot \frac{dP}{dT} \cdot (v_1 - v_2)$$

wobei P , der Druck des gesättigten Dampfes, als Function der Temperatur allein zu denken ist. Bequemer für unseren Zweck ist jedoch folgende Fassung¹⁾ der Formel, die sich mit Hülfe von (2) ergibt:

$$(13) \quad \lambda = T \cdot \int_{v_2}^{v_1} \frac{\partial P}{\partial T} \partial v.$$

Hierbei bedeutet $\partial P / \partial T$ den partiellen Differentialquotienten von P nach T (bei constantem v), während die Integration partiell nach v (bei constantem T) auszuführen ist.

Da nun nach (5):

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{v - \alpha} + \frac{c}{T^2(v + \beta)^2},$$

so erhalten wir aus (13):

$$\lambda = RT \cdot \log \frac{v_1 - \alpha}{v_2 - \alpha} + \frac{c \cdot (v_1 - v_2)}{T(v_1 + \beta)(v_2 + \beta)}.$$

1) p. 48 meiner Abhandlung.

Um schliesslich noch die Werthe der Verdampfungswärme λ auf Kilogramme und Calorien zu reduciren, sind die aus der letzten Gleichung hervorgehenden Werthe von λ noch mit 12,32 multiplicirt worden, welche Zahl sich durch Reduction der Maasse auf Meter und Kilogramme, dann durch Division mit dem mechanischen Wärmeäquivalent ergibt.

Gesetz des Verhaltens gesättigter Kohlensäure, abgeleitet aus der allgemeinen Zustandsgleichung.

φ unabhängige Variable in Winkel- graden	t Temperatur in gewöhnl. Celsius- Graden	P Druck des gesättigten Dampfes in Atmosphären	v_1 Volumen eines Gramms ges. Dampfes in Cubikcentim.	v_2 Volumen eines Gramms ges. Flüssigkeit in Cubikcentim.	λ Ver- dampfungs- wärme ein. Kg. in Calorien
0°	-273	0	∞	0,426	∞
5°	-55,5	3,5	111	0,636	114
10°	-33,6	10,3	38,5	0,718	96,6
15°	-19,2	18,1	21,6	0,792	84,4
20°	-8,8	25,9	14,6	0,866	74,7
25°	-0,7	33,4	10,9	0,939	66,5
30°	+ 5,8	40,4	8,60	1,01	59,3
35°	10,9	46,7	7,10	1,09	52,8
40°	15,2	52,3	6,03	1,17	46,8
45°	18,8	57,3	5,23	1,25	41,2
50°	21,7	61,6	4,61	1,34	36,0
55°	24,0	65,4	4,12	1,43	31,0
60°	26,0	68,5	3,71	1,52	26,2
65°	27,6	71,2	3,38	1,62	21,6
70°	28,9	73,3	3,09	1,73	17,1
75°	29,8	74,9	2,84	1,85	12,8
80°	30,5	76,1	2,63	1,98	8,5
85°	30,9	76,8	2,44	2,11	4,2
90°	31,0	77,0	2,27	2,27	0

Die letzte Horizontalreihe enthält die Bestimmungsstücke des kritischen Zustandes.

Ungenauigkeiten in den angeführten Werthensystemen sind selbstverständlich auf Rechnung der benutzten Zustandsgleichung (5) zu setzen und müssen schon deshalb erwartet werden, weil die letztere zunächst nur für den dampfförmigen Zustand berechnet ist. Indess findet immerhin eine bemerkenswerthe Annäherung an die experimentellen Resultate

statt, so weit dieselben reichen. So findet z. B. Andrews¹⁾ bei seinen neuesten Untersuchungen folgende Zahlen, die sich so gut, wie man nur erwarten kann, denen der obigen Tabelle anschliessen.

<i>t</i> Temperatur in gewöhnlichen Celsius-Graden	<i>P</i> Druck des gesättigten Dampfes in Atmosphären	<i>t</i> Temperatur in gewöhnlichen Celsius-Graden	<i>P</i> Druck des gesättigten Dampfes in Atmosphären
0	35,04	22,22	61,13
5,45	40,44	25,39	65,78
11,45	47,04	28,30	70,39
16,92	53,77		

X. Die sogenannte selbsterregende Influenzmaschine; von P. Riess.

Diese Maschine, wie sie vom Mechaniker Hrn. Voss in Berlin gefertigt wird, ist eine Holtz'sche Electrophormaschine mit vier Kämmen, an der die Cartonspitzen fehlen und durch einen Duplicator mit Metallberührung ersetzt sind. Da dieser Duplicator eine unvergleichlich kleinere Electricitätsmenge verlangt, als die Cartonspitzen, um in Wirksamkeit zu treten, daher Tage und Wochen lang ohne neue Erregung wirkt, so ist die Fabel entstanden, dass die Maschine sich selbst erregt. Dieser Irrthum ist nicht neu. Auch Nicholson hat 1788 seinen Duplicator für selbst-erregend gehalten. Die Maschine liefert in der Zeiteinheit eine viel geringere Electricitätsmenge als eine Electrophormaschine mit drei Kämmen von gleichen Dimensionen, und ist dem Polwechsel sehr ausgesetzt. Bei mässigen Ladungen einer Batterie indessen oder einer Funkenlänge zwischen den Electroden, die einen Zoll nicht übersteigt, ist der Polwechsel seltener zu fürchten. Der Polwechsel tritt sicher ein, wenn man Funken einige Zeit zwischen den Electroden übergehen lässt und diese dann bei fortgesetzter

1) T. Andrews, Proc. Roy. Soc. 24, p. 455. 1876.

Drehung der Maschine zur Berührung bringt, was auch bei einer Holtz'schen Maschine geschieht, deren rotirende Scheibe schlecht isolirt.¹⁾

Die sogenannte selbsterregende Maschine (die Duplicatormaschine) kann zu dem Zwecke empfohlen werden, bei sehr ungünstiger Luftbeschaffenheit electriche Funken einige Stunden lang zu beobachten.

**XI. Zu K. Strecker's Abhandlung:
Ueber die specifische Wärme des Chlors etc.²⁾
von Ludwig Boltzmann in Graz.**

Auf die Bemerkung des Hrn. Strecker, dass durch seine schönen und für die Theorie überaus wichtigen Versuche über das Verhältniss der specifischen Wärmen in Cl, Br und J meine Annahme über die Art der Beweglichkeit der Gasmoleculé³⁾ widerlegt würde, will ich hier nur erinnern, dass schon wegen der Gasspectra die Atome, z. B. die Hg-Dampf-atome, keine wirklichen materiellen Punkte sein können, sondern noch weiter zusammengesetzt sein müssen. Nach meiner Annahme ist aber der Zusammenhang ihrer Theile so innig, dass sie sich (natürlich nur angenähert) wie starre Körper verhalten. Hiernach könnte ganz gut schon das Atom von Cl, Br oder J ein von einer Kugel verschiedener Rotationskörper, und deren Molecul kein Rotationskörper sein, woraus für diese Gase das Verhältniss der specifischen Wärme zu 1,3333 .. folgen würde, was mit Strecker's Versuchen ziemlich gut stimmt. Uebrigens ist selbstverständlich meine Annahme eine vorläufige, noch wenig begründete, lediglich in Ermangelung einer besseren aufgestellten Hypothese.

1) Riess, Abhdl. 2. p. 56.

2) Strecker, Wied. Ann. 13. p. 20. 1881.

3) Boltzmann, Wien. Ber. 74. p. 553. 1876; Pogg. Ann. 160. p. 175. 1877.